Università Politecnica delle Marche

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E SOCIALI

Economia Politica I

sede di San Benedetto del Tronto (AP)

Docente: Giulio Palomba
Esercitazioni: Marco Tedeschi

Programma 2024/25

Nota:

Queste pagine illustrano in maniera schematica tutti gli argomenti trattati nel corso di Economia Politica I lezione dopo lezione, pertanto non possono essere considerate alla stregua di un libro di testo, ma semplicemente come un'integrazione all'uso di un testo specifico della materia. Uno scopo accessorio di questo lavoro è quello di fornire agli studenti non frequentanti un'indicazione piuttosto dettagliata circa il programma d'esame.

Indice

1 Introduzione - mar 18/02/2025

Introduzione al corso

- Presentazione
- Recapiti e ricevimento studenti
- Requisiti
- Modalità di svolgimento del corso
- Modalità di svolgimento dell'esame
- Sussidio alla didattica e Tutorato
- Libri di testo e materiale didattico
- e-learning@Econ (`https://learn.univpm.it/course/view.php?id=21983`)
- Home Page personale: (`http://utenti.dea.univpm.it/palomba/`)

Obiettivi

- fornire le basi di analisi economica,
- favorire l'apprendimento multidisciplinare,
- stimolare il ragionamento (non la memoria),
- interpretare le attuali dinamiche economico-politico-sociali,
- utilizzare il dibattito nella soluzione di problemi complessi,
- abituare lo studente ad argomentare.

Introduzione all'Economia Politica

Cos'è l'Economia Politica?

- nell'ambito delle scienze sociali, l'economia politica è ≪la scienza che studia il comportamento umano come relazione tra fini e mezzi scarsi suscettibili di usi alternativi≫; è quindi la disciplina che studia il funzionamento dei sistemi economici (Lionel Charles Robbins, 1932);
- l'Economia è ≪lo studio del modo in cui gli individui e le società pervengono a scegliere, con o senza l'intervento della moneta, di impiegare risorse produttive scarse, suscettibili di usi alternativi, per produrre vari tipi di beni e distribuirli per il consumo, attuale e futuro, tra varie persone e gruppi sociali≫ (Paul A. Samuelson, premio Nobel 1970);
- scienza **giovane** che risale al 1776, anno della pubblicazione de "La Ricchezza delle Nazioni" di Adam Smith. In quel periodo la società passa dal feudalesimo al sistema capitalistico di economia di mercato. Nel corso della storia l'uomo è passato da forme primitive di organizzazione a forme sempre più evolute di società (**divisione del lavoro**).

Società preagricola o primitiva: società di cacciatori, raccoglitori, nomadi; acquisizione delle necessità con poca fatica; inesistenza del concetto di proprietà; non si possedevano case; strumenti poco evoluti; incapacità di produrre **sovrappiù**. Non c'è bisogno di economisti o delle scienze economiche.

Rivoluzione agricola (8-10 mila anni fa): produzione di un surplus agricolo; abbandono del nomadismo; divisione del lavoro (specializzazione); aumento della produttività; diminuzione dell'autosufficienza; bisogno di scambiare, quindi nascita del mercato.

Medioevo: il sovrappiù era destinato per il consumo della classe signorile che aveva la proprietà delle terre oppure era destinato per investimenti improduttivi.

$$\begin{array}{llll} & & \text{surplus o sovrappiù} & \\ & \nearrow & & \\ \text{Divisione del lavoro} & & & \nearrow \ \text{baratto} \\ & \searrow & \text{scambio} & \\ & & & \searrow \ \text{moneta} \end{array}$$

In un dato sistema economico la **moneta** rappresenta il veicolo universale su cui effettuare uno scambio, cioè è un oggetto che viene universalmente accettato in cambio di qualsiasi bene e/o servizio.

Moneta-merce: bene che possiede uno specifico valore legato alle sue caratteristiche (ad esempio l'oro),

Moneta-segno: bene che non possiede un valore intrinseco che a sua volta può essere convertibile in moneta-merce, oppure non convertibile come avviene oggi. Esiste pertanto un'autorità politica con il potere di emetterla e di imporne la generale accettazione.

La moneta consente di superare i problemi che si generano in un'**economia di baratto** nella quale ogni transazione richiede lo scambio contemporaneo di beni e/o servizi. In particolare, la moneta riduce il problema dei **prezzi relativi**.

<u>Esempio:</u>

Supponendo che l'economia sia caratterizzata da n beni e/o servizi (x_i con $i = 1, 2, \dots, n$), si ha la seguente matrice dei prezzi relativi

beni	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_n
X_1	1	p_1/p_2	p_1/p_3	$\dots$	p_1/p_n
X_2	p_2/p_1	1	p_1/p_3	$\dots$	p_2/p_n
X_3	p_3/p_1	p_3/p_2	1	$\dots$	p_3/p_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_n	p_n/p_1	p_n/p_2	p_n/p_3	$\dots$	1

L'intero sistema si compone di un numero pari a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ prezzi relativi perché

- gli n elementi lungo la diagonale assumono valore unitario per costruzione,
- gli elementi sopra la diagonale sono gli inversi dei corrispondenti sotto la diagonale.

Se un bene è la moneta, questa assume il ruolo di **unità di misura** o **numerario** in cui si esprimono i rapporti di scambio, riducendo così il numero dei prezzi relativi a $n-1$, con $n - 1 < \dfrac{n(n+1)}{2}$ per qualsiasi valore di $n > 0$.

2 Introduzione [2], Teoria Classica: Smith - mer 19/02/2025

3 domande fondamentali:

1. Cosa produrre?
2. Come produrre?
3. Per chi produrre?

A seconda del contesto storico, sono state adottate 3 soluzioni:

1. **Tradizione:** mestiere dei genitori (es. Antico Egitto) oppure direttive di casta (es. India),
2. **Autorità:** la divisione del lavoro è stabilita da un potere centrale (es. monarchie assolute, dittature),
3. **Capitalismo, Socialismo, Economia di Mercato:** affermazione della scienza economica.

Dal medioevo all'Evo Moderno:

1. creazione degli Stati nazionali,
2. attenuazione del condizionamento religioso,
3. uso del lavoro come mezzo per raggiungere un surplus,
4. abolizione di barriere (dogane, dazi, monete diverse ecc.),
5. sviluppo del capitalismo.

Microeconomia: studia il comportamento dei singoli soggetti economici (consumatori e imprese) cercando di determinare una teoria sulla formazione di alcuni aggregati economici (in particolare domanda e offerta aggregate) e dei prezzi dei beni.

- **Teoria del Consumatore:** nel caso generale spiega la proporzionalità inversa tra aumento del prezzo e diminuzione della domanda.
- **Teoria della Produzione:** forme di mercato e fallimenti del mercato (dalla teoria neoclassica alla teoria delle decisioni in condizioni di incertezza e la teoria dei giochi).
- **Teoria della Distribuzione:** mercato del lavoro.
- **Equilibrio Economico Generale:** efficienza nell'interazione tra i singoli soggetti economici nei singoli mercati e nell'intero sistema economico.
- **Economia del benessere:** ricerca dell'ottimo sociale

Macroeconomia: studia le relazioni tra i principali aggregati economici. In particolare, si occupa delle condizioni di equilibrio del **mercato dei beni e servizi** (domanda aggregata per il consumo, relazione tra risparmio e investimenti), del **mercato monetario** (domanda e offerta di moneta, tassi d'interesse), del **mercato del lavoro** (salari e occupazione). La macroeconomia studia perciò il funzionamento del sistema economico nel suo complesso ed analizza gli effetti della politica fiscale e della politica monetaria sull'offerta e sulla domanda aggregate.

Materie derivate dall'Economia Politica: Economia Monetaria, Economia Internazionale, Economia dello Sviluppo, Politica Economica, Economia Aziendale.
Materie «specifiche»: Economia Indutriale, Economia Agraria, Economia del Lavoro, Economia dei Mercati Finanziari, Economia dell'Innovazione, Economia dei Distretti Industriali, Economia dell'Informazione, Economia del Turismo, Economia dei Beni Culturali, Economia dello Sport e degli Spettacoli ecc.

Adam Smith e il decollo dell'Economia Politica

All'interno de "La Ricchezza delle Nazioni", Adam Smith (1723-1790) sostiene che il benessere di una nazione va misurato dai beni prodotti ogni anno dal lavoro e resi disponibili per il consumo immediato o differito.

$$\begin{aligned} \text{Ricchezza} &= \text{Stock} \\ \text{Produzione} &= \text{Flusso} \\ \text{Capitale} &= \text{Stock di merci destinate alla produzione} \end{aligned}$$

Base della contabilità nazionale:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

dove Y è la produzione totale della nazione, mentre p_i e q_i sono rispettivamente il prezzo e la quantità prodotta di ciascun bene. Il prezzo funge da **numerario** (unità di conto).
Tenendo conto dei **beni intermedi** (v_i) che entrano all'interno del processo produttivo, la formula di cui sopra si modifica nel modo seguente:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = \sum_{i=1}^{n} p_i (y_i - v_i),$$

dove v_i sono le quantità di beni intermedi, mentre la differenza $q_i = y_i - v_i$ identifica la quantità venduta al netto dei beni intermedi. La quantità Y è detta **valore aggiunto**, cioè valore da aggiungere a quello dei beni intermedi per ottenere il prodotto finale. In contabilità nazionale il valore aggiunto coincide con il **Prodotto Interno Lordo** o semplicemente **PIL**.

Beni finali (q_i)	$\rightarrow$	produzione destinata alla vendita, include anche gli investimenti (I)
Beni intermedi (v_i)	$\rightarrow$	Investimenti di breve periodo che vengono consumati

In un mercato nazionale il valore aggiunto è un **flusso** indicatore di ricchezza che va a coprire la **domanda finale** ripartita come segue:

$$Y = C + I + G - T + (X - M),$$

dove C rappresenta i consumi, I gli investimenti, G la spesa pubblica, T l'introito da tassazione (gettito fiscale), mentre $X - M$ è il saldo della **bilancia commerciale** (differenza tra Export ed Import).
Adam Smith afferma che il benessere della nazione dipende dal **reddito pro-capite** dato da

$$\frac{Y}{N} = \frac{Y}{L}\frac{L}{N}$$

dove N è la numerosità della popolazione e L è il numero degli occupati.

$$\begin{cases} \dfrac{Y}{L} & \text{prodotto per occupato} \\[2ex] \dfrac{L}{N} & \text{tasso di occupazione} \end{cases}$$

Divisione del lavoro e progresso economico

Smith afferma che il sistema capitalista ad economia di mercato è caratterizzato dalla ricerca della max soddisfazione e vantaggio monetario da parte di ciascuna attività produttiva. Il surplus è la molla del mercato, non più tradizione e/o autorità.

$$\text{Fattori di crescita della produttività } Y/L \begin{array}{l} \nearrow \text{ Qualità della terra} \\ \rightarrow \text{ Qualità del capitale} \\ \searrow \text{ Grado di divisione del lavoro} \\ \quad\ \text{(es. «manifattura di spilli»)} \end{array}$$

$$\text{Divisione del lavoro} \begin{array}{l} \nearrow \text{ Lavoro specializzato} \\ \rightarrow \text{ Risparmio di tempo} \\ \searrow \text{ Stimolo alla ricerca} \end{array}$$

Divisione del lavoro ⇒ differenziazione fra mestieri e professioni ⇒ interdipendenza sociale ⇒ scambi, quindi **mercato**.

Mano invisibile: La divisione del lavoro non è un atto razionale, perché dettata dalla tendenza naturale a «trafficare».

Ruolo della mano invisibile:

- creazione di un ordine sociale che soddisfa l'interesse generale nel quale lo Stato non deve intervenire, evitando

  protezione dei ricchi o di privilegi monopolistici,

  protezione dei poveri o sussidi che limitano la mobilità della forza-lavoro, quindi lo sviluppo economico;

3 Teoria Classica: Smith [2] - gio 20/02/2025

- equilibrio dei mercati (domanda-offerta) e convergenza del prezzo di mercato verso il prezzo naturale (p_N);

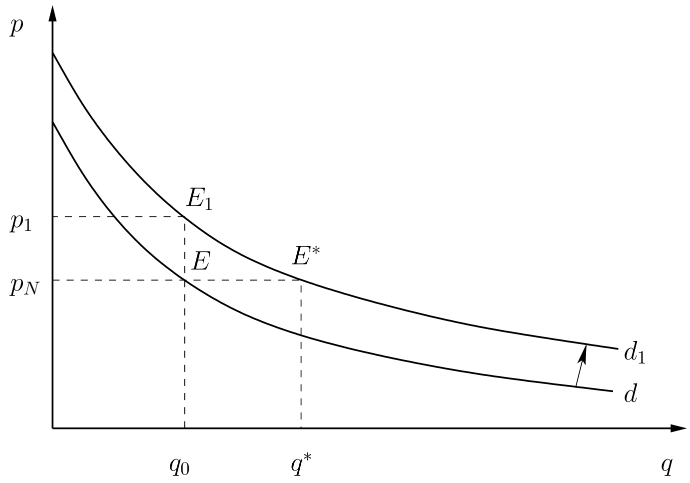


Grafico:

Il punto E rappresenta l'equilibrio iniziale in corrispondenza del prezzo naturale. La domanda aumenta (spostamento da d a d_1), quindi il prezzo aumenta fino a p_1. Entrano nuove imprese (c'è concorrenza), aumenta la produzione ed il prezzo torna sul livello p_N (equilibrio in E^*).

Prezzo naturale: in un contesto concorrenziale nel quale ogni fattore è remunerato allo stesso modo in ciascuna industria, consente di coprire tutti i costi (generalmente lavoro e rendita) e di conseguire un profitto normale.

- crescita e sviluppo economico:
  - mercato del lavoro: relazione inversa tra salario e numerosità della popolazione (valore critico: salario minimo di sussistenza (w_0),
  - risparmio, quindi accumulazione di capitale e divisione del lavoro,
  - investimenti «mirati » verso la attività più redditizie.

Espansione del mercato:

1. Migliore sistema di trasporti e comunicazioni,
2. Diffusione della moneta negli scambi,
3. Crescita della produzione,
4. La divisione del lavoro è limitata dall'estensione del mercato.

Teoria del Valore

Valore di un bene: quantità di un bene-parametro che occorre affinché il bene sia scambiato. Generalmente il bene-parametro è la **moneta**.

Barber (1975):

- un economista del XX secolo cercherebbe di determinare il valore attraverso il prezzo di mercato che sarebbe disposto a pagare per il bene,

- un economista classico individua il valore in un qualcosa di stabile che perciò non può subire fluttuazioni di mercato.

$$\text{Concetto di Valore in Smith} \begin{array}{l} \nearrow \ \text{fornire una spiegazione per le fluttuazioni dei prezzi} \\ \\ \searrow \ \text{ricerca di una unità di misura costante ed invariabile} \end{array}$$

Smith sostiene che esistono validi motivi affinché il valore di un bene venga espresso in funzione delle ore-lavoro impiegate nella sua produzione. Con la divisione del lavoro ognuno produce una piccola parte di ciò di cui ha bisogno, mentre il resto è prodotto da altri. **La ricchezza di un individuo è perciò nel lavoro che egli può comandare e/o acquistare.**

lavoro **comandato** (L')	:	valore di una merce espresso nei termini di quello di un'altra
lavoro **contenuto** ($\tilde{L}$)	:	quantità di lavoro necessaria per produrre le merci

Nelle società primitive $L' = \tilde{L}$, poiché il valore è dato dal prezzo $p = w\tilde{L} = wL'$. La situazione cambia con l'avvento del capitalismo, in quanto, oltre al salario (w), occorre remunare anche la rendita (R) ed i profitti (Π), infatti

$$p = w\tilde{L} + R + \Pi \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{L} = \frac{p - R - \Pi}{w},$$

quindi

$$\tilde{L} \leq L' = \frac{p}{w}.$$

Teoria dei Salari

Il salario corrisponde alla quantità di moneta necessaria per acquistare altri beni. Ipotesi:

1. la contrattazione lavoratori-datori di lavoro è breve,
2. la numerosità della popolazione è nota,
3. l'offerta di lavoro (esogena) è nota e fissa.

La domanda di lavoro da parte dei capitalisti dipende dalla quantità di beni accantonati (scorte, sc) affinché i lavoratori vengano mantenuti e portino a termine la produzione. In base al variare delle scorte i capitalisti assumono o licenziano lavoratori.

$$\text{Domanda di lavoro:} \quad L^d = \frac{\text{sc}}{w - w_0},$$

$$\text{Offerta di lavoro:} \qquad L^s = \bar{L},$$

dove w_0 è il livello del salario minimo per il quale gli individui decidono di lavorare.

- se w è elevato $\Rightarrow N \uparrow$ (+ nascite, - morti, - epidemie),
- se w è basso $\Rightarrow N \downarrow$ (- nascite, + morti, + epidemie).

Eguagliando l'offerta di lavoro alla domanda di lavoro si ottiene la condizione di equilibrio

$$L^s = L^d \qquad \Rightarrow \qquad \bar{L} = \frac{\text{sc}}{w - w_0}.$$

Supponendo un aumento del salario ($w \uparrow$), da questa soluzione si evince che si apre una forbice tra offerta di lavoro che aumenta ($\bar{L} \uparrow$ perché $N \uparrow$) e domanda di lavoro che diminuisce ($\text{sc}/(w - w_0) \downarrow$). Come si torna verso l'equilibrio?
Naturalmente occorre diminuire il salario e riportarlo al suo livello iniziale qualora si verifichino le seguenti condizioni:

(a) il livello delle scorte (sc) resta invariato;

(b) il livello delle scorte (sc) cresce meno che proporzionalmente rispetto alla crescita del salario w.

Dalla funzione di domanda si ricava la relazione $\text{sc} = L^d(w - w_0)$ tracciata nel seguente grafico.

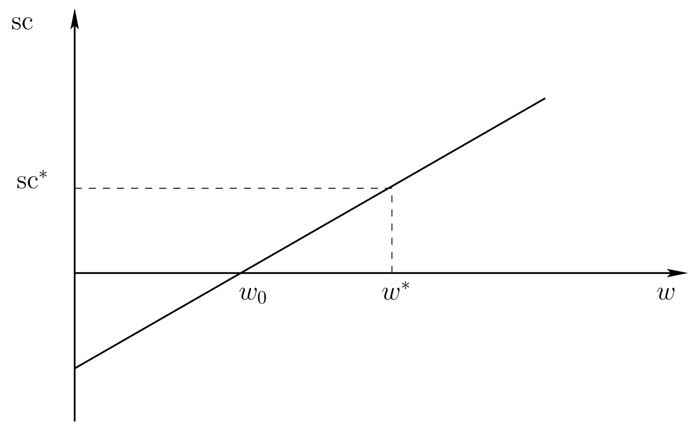


Grafico:

Smith ipotizza che la popolazione cresca al tasso $N = a(w - w_0)$, dove a è un parametro di reazione al livello del salario, quindi risulta

$$\text{sc} = 0 \Leftrightarrow w = w_0 \qquad \Rightarrow \qquad N = 0.$$

Quando il tasso di crescita della popolazione eguaglia quello di crescita dei lavoratori, occorre che sc cresca allo stesso modo per retribuire tutti i nuovi lavoratori.

In sintesi: tasso di crescita N = tasso di crescita L = tasso di crescita sc.

In conclusione, se le scorte restano costanti, la popolazione resta costante, quindi anche il salario non varia. Il valore del salario $w = w_0$ che mantiene la popolazione costante è definito come **salario di sussistenza**.

4 Richiami di Matematica - gio 20/02/2025

Lo scopo di questa lezione è sostanzialmente quello di richiamare l'attenzione degli studenti su alcuni strumenti analitici utili per il corso di Economia Politica I. In realtà gli argomenti affrontati non sono stati presentati in maniera rigorosa (per quello ci sono i docenti di matematica!), bensì si è tentato un approccio di tipo "intuitivo", basato sul consolidamento di alcune nozioni di Matematica Generale cercando nel contempo di generalizzare il tutto nello spazio ad n dimensioni.

Argomenti trattati (file *Maths.pdf*):

- funzioni di più variabili $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$;
- cenni sugli spazi a più dimensioni: $n = 1$ retta, $n = 2$ piano, $n = 3$ spazio tridimensionale...;
- derivata come $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$;
- interpretazione geometrica della derivata, derivata come impatto marginale.
- definizione geometrica ed interpretazione economica del concetto di derivata;

Gli obiettivi che si intendono raggiungere attraverso questa lezione sono sostanzialmente tre:

(a) fornire agli studenti una rassegna degli strumenti analitico-matematici di uso più frequente nel corso di Economia Politica I;

(b) favorire l'interdisciplinarità, quindi fornire una visione dell'Economia Politica come un qualcosa di strettamente interconnesso con materie di altro tipo. Queste ultime possono essere sia di tipo umanistico/sociologico, sia di tipo matematico/statistico;

(c) "strizzare l'occhio al futuro", cioè cercare di incuriosire gli studenti e/o rivolgere la loro attenzione anche verso esami o mestieri in cui l'attività principale è l'analisi economica basata su strumenti quantitativi.

5 Teoria Classica: Malthus, Ricardo - mar 25/02/2025

Malthus (1776-1834) e il problema della popolazione

Thomas Robert Malthus (1798), *An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society* (Saggio sul principio della popolazione e i suoi effetti sullo sviluppo futuro della società).
Malthus fu il primo professore di Economia della Storia.
Malthus fu il testimone di un incremento demografico in Inghilterra compreso tra lo 0.7% e l'1.5%.

Contrasto tra due progressioni:

risorse alimentari (q_i)	crescono in progressione aritmetica	$q_i = 1 + i \Rightarrow$	1,2,3,4,...
popolazione (N_i)	cresce in progressione geometrica	$N_i = 2^i \Rightarrow$	1,2,4,8,...

dove $i = 0, 1, 2, \ldots$ indica l'anno.

Anche se all'inizio la popolazione avesse a disposizione risorse in abbondanza, le progressioni porterebbero il sistema verso un inevitabile collasso (entropia): la popolazione deve ≪fermarsi≫ .

freni positivi: alzano il tasso di mortalità (epidemie, carestie, guerre),

freni negativi: riducono il tasso di natalità (comportamenti volontari).

Malthus: i freni positivi sono quelli efficaci perché sottopongono la popolazione ad un effettivo controllo.

Evoluzione in Malthus:

- miglioramento delle condizioni di vita dei lavoratori (soprattutto igienico-sanitarie),
- caduta del tasso di mortalità,
- crescita della popolazione,
- abbassamento del livello di vita (stesse risorse, più persone),
- livello di sussistenza.

Malthus *ex-post*:

Europa occidentale, Nord America, URSS: la riduzione dell'incremento demografico è strettamente connessa all'aumento del reddito pro-capite;

Cina, Giappone, India: il rallentamento demografico è dovuto a pianificazione delle nascite;

Paesi in via di sviluppo (PVS): tassi di crescita della popolazione elevatissimi, prodotto pro-capite basso, mancanza di igiene e condizioni di miseria, tentativi di pianificazione inefficaci;

Expo 2015: "Nutrire il pianeta, energia per la vita": problema dell'alimentazione, dell'educazione alimentare, della grave mancanza di cibo che affligge molte zone del mondo, tematiche legate agli OGM;

Covid-19: esempio contemporaneo di freno positivo;

Attualità: "La storia degli ultimi tre secoli di sviluppo economico è un succedersi di fonti energetiche via via più efficienti, cioè meno inquinanti, contrariamente alle descrizioni dei fondamentalisti verdi. Capitalismo (meglio se regolato) più ricerca scientifica e innovazione tecnologica è il mix vincente che ha consentito di rendere abitabile il pianeta per sette miliardi di persone, smentendo Malthus" (Rampini F., *Fermare Pechino*, Mondadori, 2021, pag. 255)

N.B.→ Limitata a soli 1.6 miliardi di individui nel 1900, nel XX secolo la popolazione mondiale ha registrato un incremento sostanziale: gli abitanti del pianeta sono diventati circa 2.5 miliardi nel 1950, poco più di 6 miliardi nel 2000 e hanno raggiunto quota 8 miliardi nel novembre 2023.

Cultura di massa: parallelismo tra Malthus e Thanos il personaggio dei fumetti (mini-serie *Il guanto dell'infinito* di Jim Starlin, disegnato da George Pérez e Ron Lim, 1991)/cinematografia (dal film *Avengers Infinity War* dei fratelli Russo, 2018).

Ricardo (1772-1823) e la Teoria della Rendita

David Ricardo (1815), *Essay on the influence of a Low Price of Corn on the Profits of Stock* (Saggio sui profitti): il profitto nell'intera economia è determinato dalla rendita che si stabilisce in agricoltura. Analogamente a Smith e Malthus, Ricardo afferma che la rendita deriva dalla scarsità delle terre fertili.

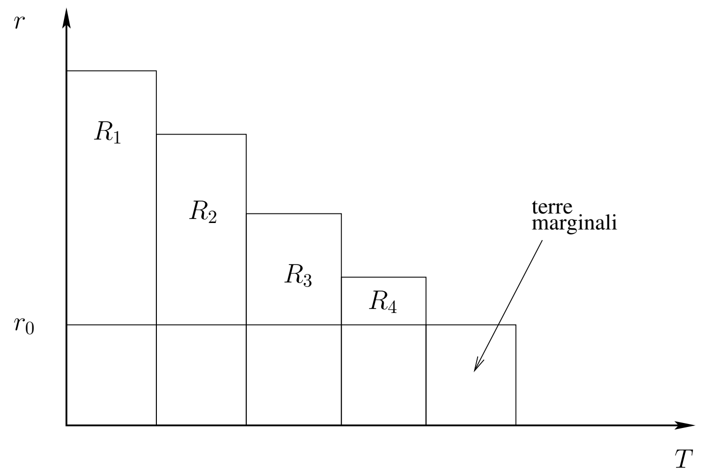
Il Modello del Grano

Il Modello del Grano spiega come si forma la rendita.

In agricolutura il tasso di profitto r è determinato come rapporto tra il profitto unitario del capitalista (Π) che dispone di una terra fertile ed il capitale investito in agricoltura (wL misurato in grano, unico mezzo di sussistenza):

$$r = \frac{\Pi}{wL} = \frac{p - wL}{wL} = \frac{p}{wL} - 1$$

Con lo sviluppo economico aumenta la popolazione ($N \uparrow$), quindi aumenta la domanda di grano; questo richiede che anche terre meno fertili vengano coltivate oppure aumenta il numero di imprese agricole. Si consideri pertanto la seguente Figura, dove in ascissa c'è la terra (T) e in ordinata il tasso di profitto (r).



Il tasso di profitto r_0 è quello relativo alle terre marginali, ovvero le terre meno fertili che però, se coltivate, danno luogo comunque ad un profitto. Naturalmente qualsiasi livello di profitto è tale che $r \geq r_0$ quindi, in un sistema di concorrenza, nessun capitalista razionalmente sceglierebbe la terra marginale per ottenere il tasso r_0. La concorrenza tra capitalisti genera la rendita (R) che copre l'ammontare dovuto al vantaggio della maggiore fertilità della terra. L'esistenza della rendita segna la cessazione delle preferenze dei capitalisti per le terre più fertili.
In pratica, quando sono messe a coltura le terre marginali (meno fertili), la concorrenza tra capitalisti determina la caduta del tasso di profitto ($r \downarrow$) fino a raggiungere il livello $r = r_0$ quindi, chi dispone di terre fertili, dovrà pagare una rendita R al proprietario della terra stessa. Quanto più la terra è fertile, tanto maggiore sarà l'ammontare della rendita ($R \uparrow$).

Conclusione del processo: tutto il surplus è assorbito dalla rendita che viene poi impiegata in investimenti improduttivi, quindi scompare dal sistema economico. Creazione di uno **stato stazionario**.

La popolazione aumenta finché i capitalisti possono anticipare grano ai lavoratori e per la semina di nuove terre. La produzione di cibo non aumenta più, quindi occorrono **freni positivi** per ristabilire un equilibrio tra popolazione e mezzi di sussistenza.
Lo stato stazionario può essere evitato mediante il progresso tecnico che fa aumentare la produzione per unità di terra e di lavoro.

Crisi di sovraproduzione generale

Ricardo:

- la scarsità di terre fertili è la causa della caduta del tasso di profitto;
- mentre i capitalisti tendono a risparmiare e a reinvestire il surplus, i proprietari terrieri si appropriano del surplus con finalità di consumo, quindi sottraggono risorse che potrebbero contribuire all'ampliamento della capacità produttiva e del benessere sociale;
- ognuno bada ai propri interessi quindi non persegue sempre il bene sociale (in contrasto con Smith).

Malthus:

- il benessere della nazione non dipende solo dall'offerta (capacità di produrre), ma anche dalla domanda (assorbimento della produzione);
- in assenza di domanda i capitalisti dovrebbero ridimensionarsi (crisi della sovraproduzione);
- difende i proprietari terrieri perché evitano il crollo di domanda di certi beni e servizi;
- il proprietario terriero è un ottimo acquirente e consumatore.

6 Teoria Classica: Marx - mer 26/02/2025

Marx (1818-1883) e la Teoria della Crisi

Premessa:

1. il processo di produzione determina la divisione in classi della società;
2. i conflitti storici sono riconducibili al modo di produzione (conflitti di classe);
3. sovrastruttura: insieme di istituzioni, leggi, credenze legate strettamente al tipo di economia in vigore;
4. unificazioni politiche, Stati nazionali, sviluppo economico e tecnologico determinano la nascita delle fabbriche: dal contrasto con il sistema feudale nascono le classi sociali.

Struttura: produzione industriale, società capitalistica;

Sovrastruttura: proprietà privata.

Marx:

- il capitalismo porta con sé le cause del suo **declino**: esso alleva il suo successore dentro di sé perché nelle grandi fabbriche crea i presupposti per l'avvento del socialismo. Tale processo viene accentuato dalla **caduta tendenziale del saggio di profitto**,
- il capitalismo è destinato a crollare perché struttura e sovrastruttura sono in contraddizione: nessuno è più in grado di produrre ciò di cui ha bisogno (eccessiva divisione del lavoro), quindi occorre **pianificazione**.
- la pianificazione è in contrasto con la proprietà privata dei mezzi di produzione,
- il **proletariato** è il protagonista, non il capitalista,
- la mano invisibile smithiana esiste.

Capitale
$\nearrow$ insieme dei mezzi di produzione: lavoro indiretto cristallizzato in beni
$\searrow$ produzione del profitto a vantaggio di pochi

Teoria dello Sfruttamento

Teoria dello sfruttamento
$\nearrow$ i capitalisti possiedono i mezzi di produzione
$\searrow$ i lavoratori possiedono forza-lavoro che vendono per il salario

Capitalista
$\nearrow$ paga un salario di sussistenza (w_0)
$\searrow$ impiega i lavoratori per un totale di ore superiore a quello necessario per la produzione

In formule, le ore-lavoro (o lavoro diretto, L) impiegate nel processo di produzione ammontano a

$$L = K + V + S,$$

cioè devono remunerare

- capitale (costante per ipotesi): lavoro indiretto (K),
- capitale variabile: ore-lavoro socialmente necessarie per la produzione (V),

- plusvalore o pluslavoro (S).

Il saggio del plusvalore (o dello sfruttamento) è dato da

$$S' = \frac{S}{V},$$

mentre il tasso di profitto (come in Ricardo) ammonta a

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{profitto}}{\text{capitale}} \\ &= \frac{S}{K+V} = \frac{SV}{V(K+V)} = \frac{V}{K+V}\frac{S}{V} = \left(1 - \frac{K}{K+V}\right) S' = (1-\kappa)S' \end{aligned}$$

dove la quota percentuale $(1-\kappa)$ rappresenta la **composizione organica del capitale**. La caduta tendenziale del saggio di profitto deriva dalla sostituzione dei lavoratori con le macchine, poiché la forza lavoro genera il profitto per il capitalista.
In formule, se aumenta la quantità di capitale ($K \uparrow$), allora il rapporto $\frac{K}{K+V} \uparrow$, quindi $\kappa \uparrow$ e $r \downarrow$.

Dimostrazione:

Per un dato $V > 0$, il rapporto $\frac{K}{K+V}$ è un valore percentuale, in quanto risulta sempre $K \leq K+V$. Nei casi estremi risulta

- se $K = 0$ (il capitalista non utilizza lavoro indiretto), allora $\frac{K}{K+V} = 0$,
- se $K \to \infty$ (il capitalista utilizza quantità sempre maggiori di lavoro indiretto), allora

$$\lim_{K\to\infty} \frac{K}{K+V} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} (1-\kappa) = 0.$$

N.B.$\rightarrow$ La caduta del saggio di profitto analizzata da Marx è una caduta definita come "tendenziale" e non come "inevitabile". Marx individua infatti dei fattori che potrebbero contrastare la tendenza di fondo:

- diminuzione della quantità di ore-lavoro contenute nel capitale (costante) K a causa dell'aumento della produttività del lavoro nel settore che produce i beni intermedi. Questo fattore potrebbe anche più che compensare l'aumento di K dovuto dalla sostituzione dei lavoratori con le macchine;
- aumento dell'intensità dello sfruttamento S' dovuto all'allungamento della giornata lavorativa (ore-lavoro $L \uparrow$) o alla diminuzione del salario giornaliero ($w_0 \downarrow$).

Teoria dei Salari

Analogamente a Smith e a Ricardo, Marx ritiene che nel sistema capitalistico il salario sia destinato a permanere ad un livello di sussistenza. Mentre per i suoi predecessori ciò avveniva a causa dell'aumento della popolazione per Marx la causa risiede nell'esistenza dell'**esercito industriale di riserva**.

$$\text{Aumento dei salari} \begin{array}{ll} \nearrow & \text{il capitalista licenzia} \\ \rightarrow & \text{incremento dell'esercito industriale di riserva} \\ \searrow & \text{concorrenza tra lavoratori} \rightarrow \text{abbassamento salario} \end{array}$$

Conclusioni:

1. il capitalismo va incontro a crisi ricorrenti che sono provocate dall'esaurimento dell'esercito industriale di riserva,
2. i ricorrenti aumenti di salario spingono il capitalista verso l'uso delle macchine,
3. il salario non dipende da elementi naturali come la crescita della popolazione.

Teoria Neoclassica (cenni)

Gli autori classici e neoclassici concordano nel vedere il libero mercato e la competizione tra agenti economici (che perseguono il proprio interesse individuale) come motori dello sviluppo economico che si è storicamente verificato con l'avvento del capitalismo e, quindi, della Rivoluzione Industriale nel XVIII secolo

Teoria Classica	**Teoria Neoclassica**
Osservazione e studio dei fenomeni dall'"esterno"	Osservazione e studio dei fenomeni dall'"interno" (agente rappresentativo)
Concetti e schemi relativi al periodo storico (Prima Rivoluzione Industriale)	Impiego di modelli matematici e del marginalismo (scienza "esatta")
Popolazione divisa in classi sociali: capitalisti, proprietari terrieri, lavoratori	no classi sociali: libere scelte di individui i quali non sono solo i produttori, ma anche i consumatori).
Sovrappiù in un'economia di libero mercato (profitti, rendite e salari)	Comportamenti individuali finalizzati al raggiungimento di un obiettivo di benessere.
Profitto determinato in modo residuale (ricavi meno rendite e salari)	Profitto determinato dalla differenza tra entrate ed uscite

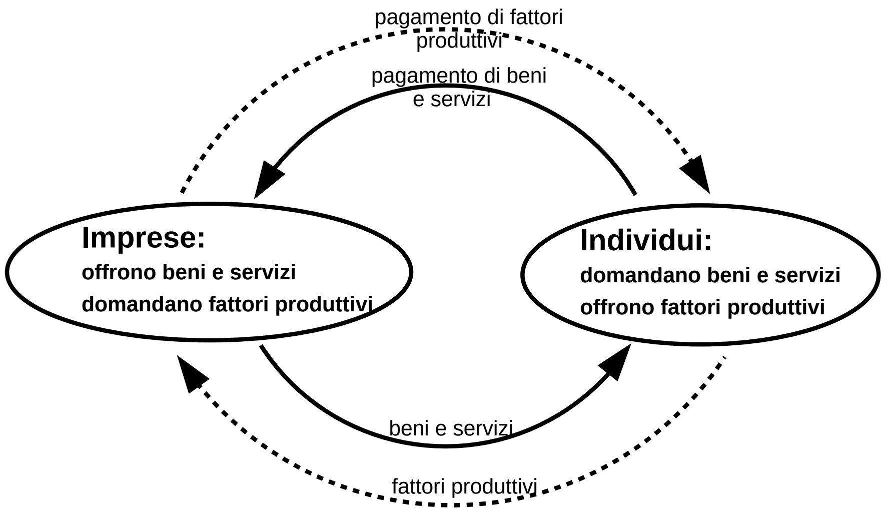
Nella teoria economica classica, l'Economia Politica nasce intorno al concetto di **Homo Œconomicus**, secondo il quale un individuo oppure una collettività (ad esempio: impresa, regione, Stato) ha la caratteristica principale di essere **razionale**, ovvero quella di perseguire i propri obiettivi sfruttando al meglio le informazioni a sua disposizione, nonché le sue capacità/abilità personali. In pratica, l'Homo Œconomicus è colui che persegue la massimizzazione del proprio benessere (o felicità) cercando di rendere minimi tutti i costi implicati dalla sua attività.

Walras (1834-1910) distingue tra economia politica **pura** (determinazione dei prezzi), economia politica sociale (distribuzione della ricchezza) ed economia politica **applicata** (teoria della produzione agricola, industriale e commerciale).
La Teoria Neoclassica si afferma intorno al 1870. Definizioni fondamentali:

- Il mercato,
- Gli agenti,
- La funzione di domanda (*demand*, d),
- La funzione di offerta (*supply*, s),
- Equilibrio di mercato.

7 Teoria della Produzione e dell'Impresa - mar 27/02/2025

Comportamento degli agenti (Figura 1.1, Libro Palomba e Staffolani, pag. 7)



Obiettivo: spiegare l'andamento (crescente) delle curve di offerta, cioè studiare le relazioni esistenti tra fattori produttivi e prodotti ottenuti.

Ipotesi nella **Teoria Neoclassica**:

1. ciascun agente si comporta in maniera tale da raggiungere un obiettivo,

   imprese: massimizzano il profitto
   $$\Pi = \mathrm{RT} - \mathrm{CT},$$
   dove RT sono i ricavi totali e CT sono i costi totali;

   individui: massimizzano l'utilità (circa "soddisfazione personale"),

2. la **razionalità** dell'agente (cfr. Homo Œconomicus) è mossa dai sentimenti di avidità e paura.

Ipotesi specifiche sul comportamento delle imprese:

1. l'impresa è un'agente che utilizza fattori produttivi e li trasforma in prodotti (scatola nera, input e output),

2. i **fattori produttivi** (o **input**) sono tipicamente il lavoro (L) ed il capitale (K), ma possono essere considerati anche le materie prime (X), i beni intermedi o semilavorati (B), ...
   Inoltre, in ciascuna variabile non si distingue tra le m diverse mansioni/qualifiche (ad esempio $L = [L_1\ L_2\ \dots\ L_m]$).

3. l'utilizzo dei tutti i fattori produttivi è misurato in **ore di utilizzo**,

4. produrre significa **trasformare** beni e servizi in beni e servizi (direttamente consumabili),

5. le imprese sono ≪**mono-prodotto**≫,

6. la produzione corrisponde al **valore aggiunto**, quindi i beni intermedi non vengono considerati,

7. la tecnologia è **esogena** e rappresenta la relazione input-output,

8. l'impresa, l'imprenditore ed (eventualmente) il manger d'impresa sono identificati come unico agente che prende le decisioni,

9. l'**impianto** è l'area o lo stabilimento nel quale il processo produttivo ha luogo.

Funzione di produzione

La funzione di produzione

$$q = q(L, K, X, B, \ldots),$$

dove q è la quantità prodotta ed i fattori esplicativi corrispondono ai fattori produttivi, determina la quantità massima di output ottenibile da una data combinazione di input. Essa corrisponde a tutte la **tecniche efficienti** per produrre q in un dato periodo.

Tecnica efficiente
- $\nearrow$ utilizza il minor numero di input a parità di output prodotto
- $\rightarrow$ ha il minore costo a parità di input utilizzati
- $\searrow$ qualsiasi tecnica in assenza di informazione sui costi degli input

N.B.$\rightarrow$ Nella teoria neoclassica generalmente si utilizza l'ipotesi semplificatrice

$$q = q(L, K),$$

quindi la funzione di produzione è vista come **funzione di 2 variabili** (generalmente lavoro e capitale).

Esempio:

Quantità prodotta attraverso l'utilizzo di ore-lavoro e ore-capitale (Libro Palomba e Staffolani: Tabella 2.1, pag. 49)

K \ L	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	24	54	72	90	102	112	120
2	28	80	156	208	245	264	280	288
3	60	162	288	384	455	492	518	526
4	94	240	432	576	680	708	728	736
5	120	270	510	680	820	858	882	890
6	130	300	558	744	890	930	952	960
7	147	322	588	784	924	954	980	988
8	150	330	600	800	936	972	992	1000

Dalla Tabella si evince che la funzione di produzione è:

- in assenza di entrambi gli input, la produzione è nulla, quindi $q(0,0) = 0$;
- non decrescente in L e K, quindi $\dfrac{\partial q(L,K)}{\partial L} \geq 0$ e $\dfrac{\partial q(L,K)}{\partial K} \geq 0$;
- concava in L e K, quindi $\dfrac{\partial^2 q(L,K)}{\partial L^2} < 0$ e $\dfrac{\partial^2 q(L,K)}{\partial K^2} < 0$

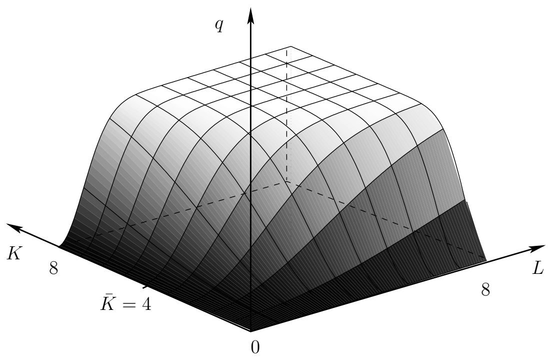
N.B.→ In realtà la teoria Neoclassica impone un primo tratto convesso della funzione (per L e K "piccoli") per dare alla funzione di produzione maggiore generalità.

Definizioni fondamentali (cfr. Marshall):

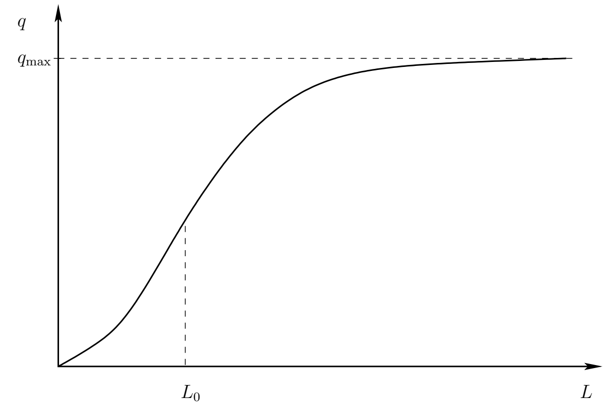
Breve periodo: arco di tempo nel quale la quantità utilizzata di alcuni fattori produttivi resta costante (tipicamente l'input $K = \bar{K}$ è un dato esogeno e la produzione dipende dal solo utilizzo dell'input L);

Lungo periodo: la quantità di tutti gli input è variabile, quindi l'impresa si configura davvero come una «funzione di più variabili».

(a) Funzione di produzione
(sentieri)

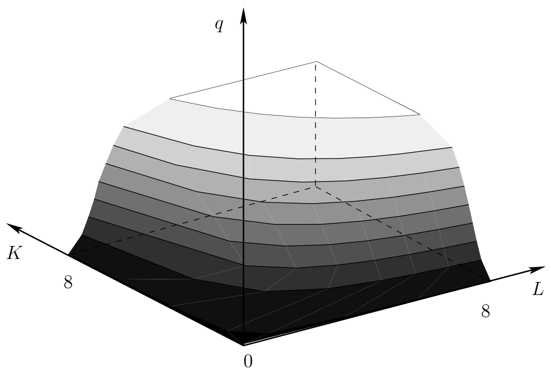


(b) Funzione di produzione di breve periodo
(fattore L variabile, fattore $K = \bar{K}$ fisso)

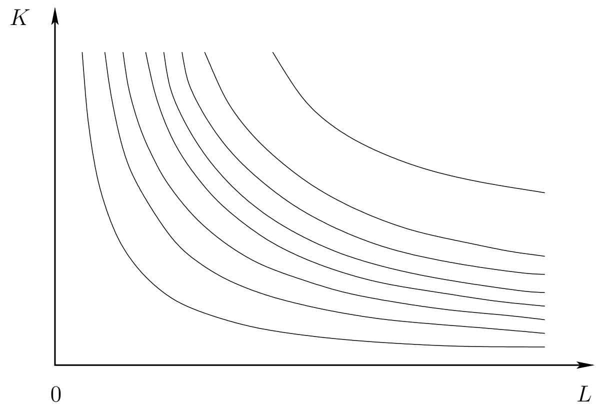


(c) Funzione di produzione

(curve di livello)



(d) Funzione di produzione di lungo periodo:
Isoquanti di produzione
(due fattori variabili, produzione fissata $q = \bar{q}(L, K)$)



8 Matematica 2 - gio 27/02/2025

Richiami di matematica

Argomenti trattati (file *Maths.pdf*, continua da pag. 11):

- segno delle derivate seconde: concavità e convessità;
- definizione geometrica ed interpretazione economica del concetto di derivata;
- vettore gradiente $\nabla(\underline{x})$ (delle derivate prime) e matrice Hessiana $H(\underline{x})$ (delle derivate seconde);
- condizione del 1^o ordine (annullamento di tutte le derivate), crescenza e decrescenza;
- punti di massimo, di minimo, di sella;
- la retta, variazioni di coefficiente angolare ed intercetta;

9 Funzione di produzione - mar 04/03/2025

simulazione Funzione di produzione: grafico tridimensionale e rotazioni

1. Funzione di produzione di breve periodo

Proprietà di $q = q(L, K)$ (con $K = \bar{K}$):

1. vale la relazione $q(0, \bar{K}) \geq 0$: se la tecnologia è completamente automatizzata può accadere che $q(0, \bar{K}) > 0$ per qualsiasi $\bar{K} > 0$. Può altresì accadere che, se $L = 0$, non si è in grado di produrre, quindi $q(0, \bar{K}) = 0$;
2. funzione **non** decrescente;
3. generalmente la teoria neoclassica adotta una funzione di produzione inizialmente convessa che poi diventa concava («forma a S», quindi c'è presenza di un flesso);
4. dalla funzione di produzione si possono ricavare:

Produttività marginale del lavoro: rapporto tra l'incremento massimo di produzione ottenuto a seguito di un incremento del fattore produttivo variabile (L); si identifica nella derivata

$$\mathrm{q}'_L = \frac{\partial q}{\partial L}$$

La produttività marginale è perciò il contributo alla produzione di un'unità aggiuntiva di ore-lavoro;

Produttività media: prodotto ottenuto per ciascuna ora lavoro, dato dal rapporto

$$\mathrm{qM}_L = \frac{q}{L}$$

Graficamente, q'_L e qM_L si ricavano come segue:

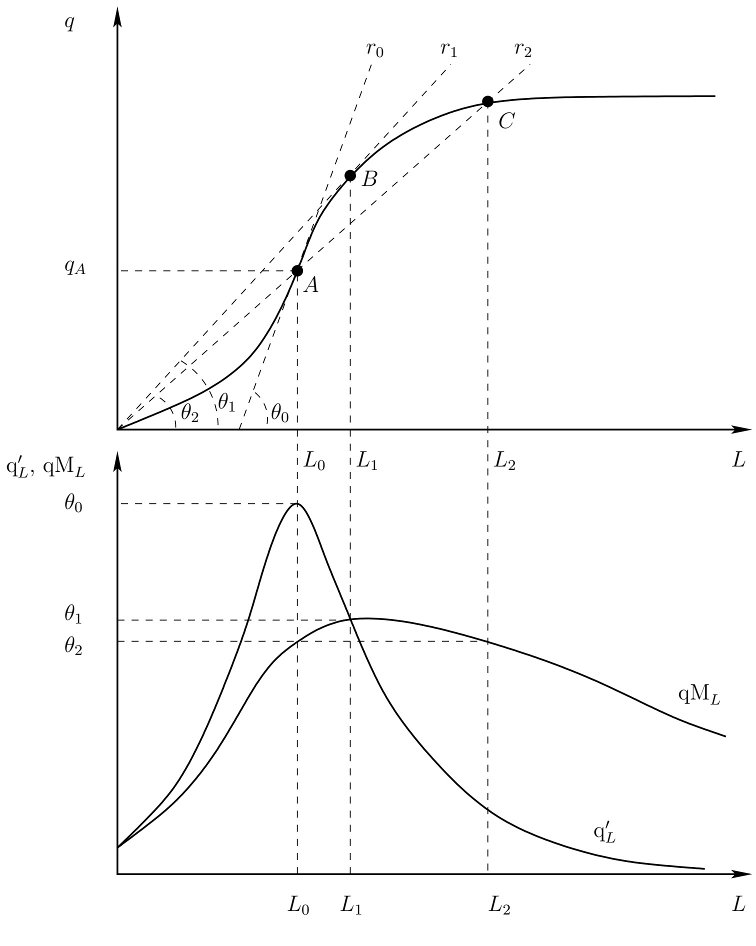


Grafico:

La curva q'_L è data dalla pendenza della retta tangente nei punti della funzione di produzione (ad esempio, nel punto di flesso A è la retta r_0).
La curva qM_L è data dalla pendenza della retta secante che congiunge l'origine a ciascun punto della funzione di produzione (ad esempio, nel punto di flesso A è la retta r_2).
L'intersezione si ha in corrispondenza della retta tangente al grafico che passa per l'origine (retta r_1).

In generale:

$$\begin{cases} q'_L \geq 0 & \rightarrow \text{ un aumento nell'utilizzo dell'input non può ridurre l'output,} \\ qM_L > 0 & \rightarrow \text{ mediamente l'output prodotto da ciascun input è positivo,} \\ \lim\limits_{L\to\infty} qM_L = \lim\limits_{L\to\infty} q'_L = 0 & \rightarrow \text{ asintoticamente } (L \to \infty) \text{ le curve coincidono, cioè il contributo} \\ & \quad\ \text{di una unità in più di lavoro è nullo, così come il contributo medio.} \end{cases}$$

Proprietà reciproche:

- se $q'_L > qM_L \Rightarrow$ qM_L è crescente: un'unità aggiuntiva di ore-lavoro apporta un contributo alla produzione maggiore di quello medio delle ore-lavoro già utilizzate;
- se $q'_L = qM_L \Rightarrow$ qM_L è massima: un'unità aggiuntiva di ore-lavoro apporta un contributo alla produzione uguale a quello medio delle ore-lavoro già utilizzate;
- se $q'_L < qM_L \Rightarrow$ qM_L è decrescente: un'unità aggiuntiva di ore-lavoro apporta un contributo alla produzione minore di quello medio delle ore-lavoro già utilizzate.

Generalmente la curva della produttività marginale interseca quella della produttività media nel suo punto di massimo.

Dimostrazione:

Derivando la produttività media rispetto ad L

$$\frac{\partial qM_L}{\partial L} = \frac{\frac{\partial q}{\partial L}L - \frac{\partial L}{\partial L}q}{L^2} = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial q}{\partial L} - \frac{q}{L}\right) = \frac{1}{L}(q'_L - qM_L)$$

10 Funzione di produzione [2] - mer 05/03/2025

5. **Legge della Produttività Marginale Decrescente degli Input Variabili:**

$$\lim_{L \to \infty} q(L, \bar{K}) = q_{\max}$$

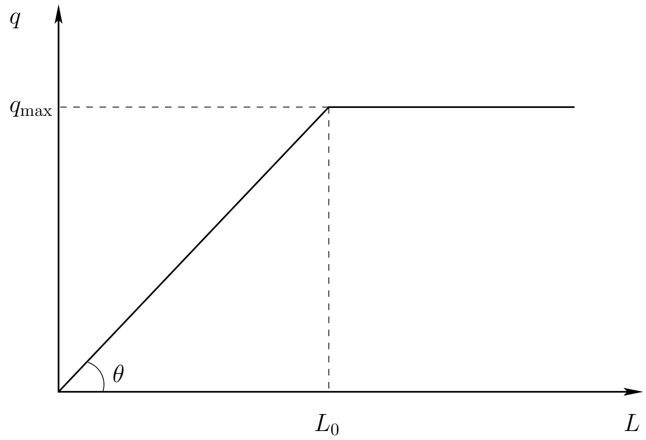
   Dato che il capitale è fisso, inizialmente l'incremento dell'input variabile porterà ad un aumento della produzione, poi la quantità prodotta tenderà a stabilizzarsi poiché la proporzione tra lavoro e capitale richiesta dalla tecnologia in uso non può essere mantenuta. Questa caratteristica impedisce alla funzione di essere convessa in corrispondenza valori elevati di L;

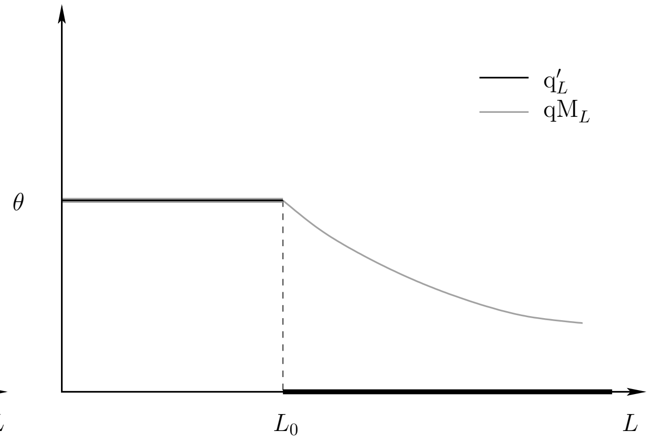
Casi particolari:

1. funzione di produzione **interamente concava:** q'_L è sempre decrescente e si trova sempre al di sotto della curva qM_L.
   Caso già discusso sopra nel tratto in cui $L > L_0$;

2. funzione di produzione **lineare** $q = \begin{cases} \theta L & \text{se } L \leq L_0 \\ q_{\max} & \text{se } L > L_0 \end{cases}$:

   - se $L \leq L_0 \Rightarrow \mathrm{q}'_L = \mathrm{qM}_L = \theta$, con θ costante (coefficiente angolare della funzione di produzione),
   - se $L > L_0 \Rightarrow \mathrm{q}'_L = 0$, mentre qM_L è un'iperbole decrescente. È rispettata la condizione $\mathrm{qM}_L > \mathrm{q}'_L$ quando L assume valori elevati.





Dato che l'obiettivo dell'impresa è massimizzare il profitto, allora risulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial p\, q - r\bar{K} - wL}{\partial L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p\frac{\partial q}{\partial L} - w = 0,$$

dove r è il costo del capitale, $\bar{K}$ è la quantità (fissa) di capitale impiegato e p è il prezzo esogeno di vendita del prodotto. Il risultato a cui si giunge è quindi

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \frac{w}{p} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{q}'_L = \frac{w}{p}.$$

Al fine della massimizzazione del profitto, l'impresa deve eguagliare la produttività marginale del lavoro al **salario reale** dato dal rapporto tra salario nominale (w) e livello del prezzo (p).

2. Funzione di produzione di lungo periodo

La funzione di produzione di lungo periodo è data da

$$\bar{q} = \bar{q}(L, K),$$

dove il livello di produzione è fissato al valore $q = \bar{q}$. Generalmente questa funzione viene rappresentata attraverso le **curve di livello** che prendono il nome di **isoquanto di produzione**. Esse rappresentano tutte le possibili combinazioni lavoro-capitale che danno luogo allo stesso livello di output. Proprietà degli isoquanti:

1. $q(0, 0) = 0$ (senza input non è possibile produrre),
2. curve decrescenti e convesse (salvo il caso di fattori perfettamente complementari),
3. la quantità di output prodotto è maggiore quanto più ci si allontana dall'origine,
4. legge della produttività marginale decrescente per tutti gli input, cioè

$$\frac{\partial q}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial q}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial K^2} < 0$$

5. non possono intersecarsi tra loro.

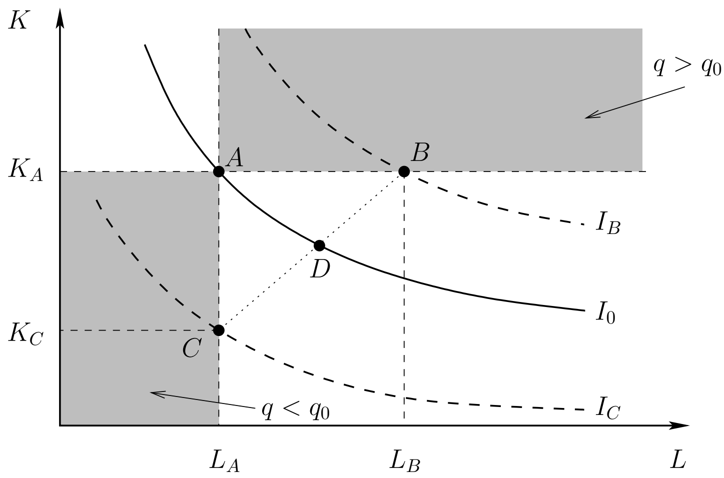


Grafico:

Supponendo che l'impresa scelga una tecnica indicata dal punto A, la quantità di output prodotta è data da $q_0 = q(L_A, K_A)$. Si scelgano altri due punti B e C in corrispondenza dei quali la produzione risulta essere rispettivamente maggiore e minore di q_0 (aree grigie situate a Nord-Est e a Sud-Ovest di A); congiungendo questi punti si ottiene il segmento $\overline{BC}$ nel quale l'estremo B garantisce una produzione $q > q_0$, mentre l'estremo C garantisce una produzione $q < q_0$; su qualsiasi segmento $\overline{BC}$ costruito attraverso questo metodo deve esserci perciò un punto D nel quale il livello di output prodotto è esattamente $q = q_0$. Tutti i possibili punti per cui ciò vale, danno luogo all'isoquanto di produzione.

Dato che l'isoquanto I_0 passa "in mezzo" agli isoquanti I_A e I_B, si evince che una proprietà fondamentale degli isoquanti di produzione è quella relativa al fatto che questi **non possono intersecarsi**. Naturalmente ciò dipende dal fatto che ciascun isoquanto di produzione è in realtà una curva di livello della funzione di produzione. È comunque possibile la seguente dimostrazione alternativa di questa caratteristica.

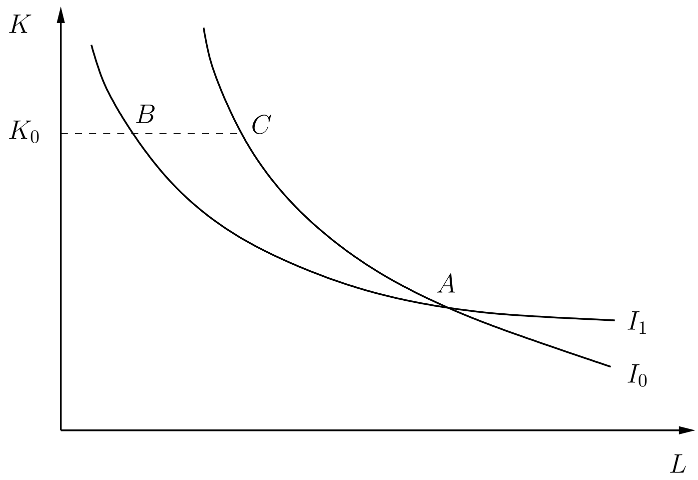
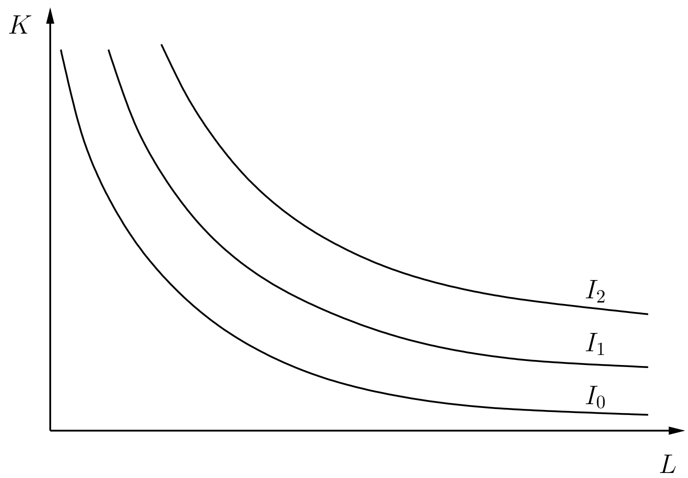


Grafico:

Dimostrazione per assurdo: supponendo che gli isoquanti di produzione possano intersecarsi si avrebbe uno scenario come quello nella Figura. Attraverso la tecnica A si ottiene lo stesso livello di output che si otterrebbe con le tecniche B e C, in quanto A appartiene allo stesso isoquanto che include B, ma anche all'isoquanto che include C. Poiché il livello di produzione ottenibile con la tecnica C è maggiore di quello ottenibile con la tecnica B (stesso numero di ore-capitale, ma in C le ore-lavoro sono maggiori) si crea un'evidente contraddizione.

Mappa degli isoquanti di produzione per diversi livelli di output



Proprietà generali isoquanti di produzione nel piano L-K:

(a) curve di livello ("parallele"),

(b) associati a livelli di output crescenti via via che aumenta la distanza dall'origine,

(c) relazione inversa tra L e K (sostituibilità tra input),

(d) convessità.

11 Matematica 3 - gio 06/03/2025

Richiami di matematica

Argomenti trattati (file *Maths.pdf*, continua dalle pagg. 11 e 21):

- variazioni assolute $\Delta x = x - x_0$, oppure $\partial x = x - x_0$ se la differenza tra valore iniziale e valore finale è infinitesima, cioè $x \to x_0$;
- variazioni relative (o percentuali) $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ oppure $\dfrac{\partial x}{x}$ se la variazione è infinitesima;
- problema dell'unità di misura nelle variazioni e definizione di numero puro.
- integrali definiti.

- cenni sul concetto di differenziale

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} d\,x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} d\,x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} d\,x_n$$

- Logaritmo.

12 Sostituibilità/complementarità - gio 06/03/2025

Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica (SMST)

Lungo il singolo isoquanto di produzione la quantità prodotta $q = \bar{q}$ è costante per definizione.
Cosa accade se si decide la riduzione (aumento) dell'utilizzo di L? Di quanto si deve aumentare (ridurre) l'utilizzo di K?
SMST: grado di sostituibilità degli input al fine di conseguire lo stesso livello di output. Calcolo del differenziale

$$dq = \frac{\partial q}{\partial L} dL + \frac{\partial q}{\partial K} dK$$

Poiché ci si muove lungo lo stesso isoquanto, la variazione di output prodotto è nulla ($dq = 0$), quindi

$$\frac{\partial q}{\partial L} dL + \frac{\partial q}{\partial K} dK = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{q}'_L dL + \mathrm{q}'_K dK = 0$$

Il SMST(L, K) è dato perciò dalle seguenti espressioni equivalenti:

$$\mathrm{SMST}(L, K) = \frac{dK}{dL} = -\frac{\mathrm{q}'_L}{\mathrm{q}'_K}$$

SMST(L, K)
- $\nearrow$ rapporto dei differenziali di K e L che lasciano inalterata la quantità prodotta
- $\rightarrow$ opposto del rapporto delle produttività marginale dei due input
- $\searrow$ pendenza dell'isoquanto di produzione

N.B.$\rightarrow$ Quest'ultima definizione scaturisce dal fatto che, per variazioni infinitesime, vale l'approssimazione $\dfrac{dK}{dL} \approx \dfrac{\partial K}{\partial L}$.

La scarsità dei fattori determina il grado di sostituibilità dei fattori (SMST), cioè:

- se L è scarso $\Rightarrow \mathrm{q}'_L$ è alta $\Rightarrow |\mathrm{SMST}(L, K)|$ elevato,
- se K è scarso $\Rightarrow \mathrm{q}'_K$ è alta $\Rightarrow |\mathrm{SMST}(L, K)|$ basso.

Questo meccanismo noto come **Legge del SMST decrescente**, fa sì che risulti

$$\frac{\partial\,|\mathrm{SMST}(L, K)|}{\partial L} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\,\mathrm{SMST}(L, K)}{\partial L} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(\partial\, K/\partial\, L)}{\partial L} = \frac{\partial^2 K}{\partial L^2} > 0,$$

ciò dimostra che l'isoquanto è **convesso**.

Sostituibilità dei fattori produttivi: possibilità di produrre una data quantità di output modificando le proporzioni di lavoro e capitale.

Isoquanto
- $\nearrow$ tratto ≪**piatto**≫: capitale difficilmente sostituibile o scarso (tecnologia labour intensive/capital saving)
- $\searrow$ tratto ≪**ripido**≫ : lavoro difficilmente sostituibile o scarso (tecnologia capital intensive/labour saving)

Isoquanti particolari nel piano cartesiano (L, K):

(a) fascio di rette decrescenti: input perfetti sostituti,

(b) isoquanti con angolo retto (proporzioni fisse): input perfettamente complementari,

(c) fascio di rette orizzontali: la produzione dipende dall'impiego di capitale (poco rilevante),

(d) fascio di rette verticali: la produzione dipende dall'impiego di lavoro (poco rilevante).

Perfetta sostituibilità/complementarità

Esempio:

Libro Palomba e Staffolani, sezione 2.3.6, pag. 77:

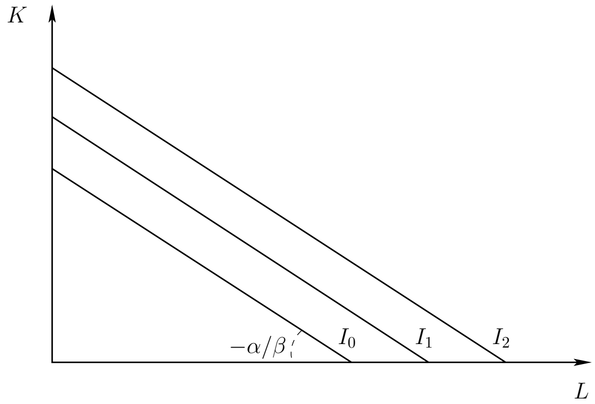
- casello autostradale con $q = 2400$ pedaggi in un'ora, il casellante riscuote 120 pagamenti, il telepass ne riscuote 1200, quindi risulta

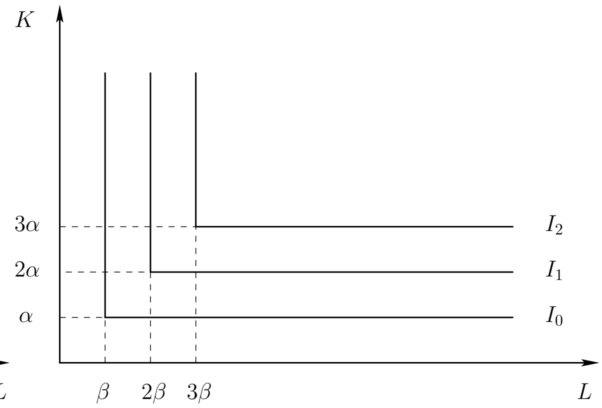
$$120L + 1200K = 2400 \qquad \Rightarrow \qquad K = 2 - 0.1L \qquad \text{(funzione lineare);}$$

- spostameto in un'ora di $q = 200$ quintali di terra con autisti ed autocarri.

(a) Perfetta sostituibilità:
$q = \alpha L + \beta K$
isoquanti lineari
$\mathrm{SMST}(L, K) = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ (costante rispetto a L e K)

(b) Perfetta complementarità:
$q = A \min\{\alpha L, \beta K\}$
isoquanti "ad angolo retto"
$\alpha L = \beta K \;\Rightarrow\; \dfrac{K}{L} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ (proporzioni fisse)

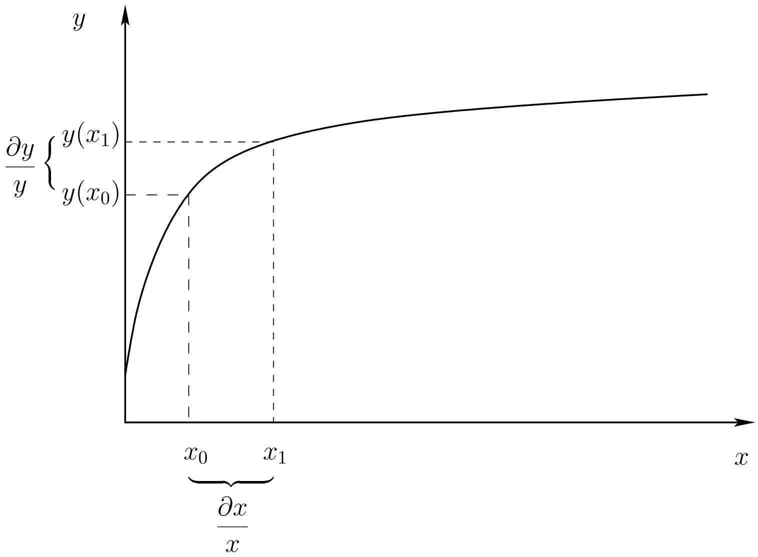




dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri tecnologici, $A > 0$ è una costante moltiplicativa.

13 Elasticità - mar 11/03/2025

Si consideri una generica funzione $y = y(x)$ e una variazione percentuale infinitesima $\dfrac{\partial x}{x}$ dal punto x_0 che genera la variazione percentuale inifitesima $\dfrac{\partial y}{y}$.



In matematica l'elasticità di una funzione $y = y(x)$ è data da

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\partial y}{y} \bigg/ \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

Proprietà:

1. l'elasticità è il rapporto tra la variazione percentuale di y e la variazione percentuale di x date rispettivamente dalle grandezze
$$\frac{\partial y}{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial x}{x};$$
2. l'elasticità è un **numero puro** non dipende dall'unità di misura;
3. l'elasticità **non coincide** con la derivata, ma **ha lo stesso segno** della derivata (si veda la seconda equazione definitoria);
4. l'elasticità è normalmente calcolata per variazioni infinitesime di x ed y cosicché il rapporto $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ corrisponde alla derivata;
5. per variazioni non infinitesime (Δx e $\Delta y(x)$) è possibile calcolare l'**elasticità ad arco**, data da
$$\widehat{\varepsilon}_{y,x} = \frac{\Delta y}{\bar{y}} \bigg/ \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\bar{y}} \bigg/ \frac{x_1 - x_0}{\bar{x}}$$
dove x_0 ed y_0 rappresentano i valori iniziali per le variabili, mentre x_1 ed y_1 sono i valori delle stesse dopo la variazione. I valori centrali
$$\bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2} \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = \frac{y(x_0) + y(x_1)}{2}$$
individuano il **punto medio dell'arco**. L'elasticità d'arco è definita anche dal prodotto
$$\widehat{\varepsilon}_{y,x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x_0 + x_1}{y(x_0) + y(x_1)}.$$

N.B.→ All'esame, la formula per l'elasticità ad arco

$$\widehat{\varepsilon}_{y,x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x_0}{y(x_0)}$$

sarà considerata corretta.

6. vale la seguente relazione

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

In breve

$$\frac{\partial \ln y}{\partial \ln x}\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial \ln y}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial \ln x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{y}x\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y} = \varepsilon_{y,x}.$$

---

7. esistono funzioni **isoelastiche**, cioè funzioni lungo le quali l'elasticità è costante. Queste funzioni sono sono **loglineari** del tipo

$$y = c_0\, x^\eta,$$

dove $c_0 > 0$ e $\eta \in \mathbb{R}$ è il valore di elasticità (costante).

<u>*Dimostrazione:*</u>

Dimostrazioni-lampo (tra loro) alternative:

- poiché $\frac{\partial y}{\partial x} = \eta\, c_0 x^{\eta-1}$ e $\frac{x}{y} = \frac{x}{c_0 x^\eta}$, risulta $\varepsilon_{y,x} = \eta \frac{\cancel{c_0 x^{-\eta}}}{\cancel{c_0 x^\eta}} = \eta$;
- poiché la funzione di domanda è loglineare, significa che $\ln y = \ln c_0 + \eta \ln x$ (funzione lineare nei logaritmi), quindi $\varepsilon_{y,x} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = \eta$.

Isoelasticità e linearità

Funzione	Lineare $y = mx + q$	Loglineare $y = c_0 x^\eta$
Caratteristica	derivata costante $\frac{\partial y}{\partial x} = m$	elasticità costante $\varepsilon_{y,x} = \eta$
$m = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$	se $m = 0$ retta orizzontale	se $\eta = 0$ variabile dipendente costante
$m \to \pm\infty \Leftrightarrow \eta \to \pm\infty$	se $m \to \pm\infty$ retta verticale	se $\eta \to \pm\infty$ variabile indipendente costante

Le funzioni lineari hanno <u>sempre</u> derivata costante ed <u>in generale</u> hanno elasticità variabile. Tuttavia, esistono i seguenti casi particolari di funzioni isoelastiche lineari (rette):

- $\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad y = c_0 x^0 \quad \Rightarrow \quad y = c_0$: variabile dipendente fissa,
- $\eta = 1 \quad \Rightarrow \quad y = c_0 x$: retta passante per l'origine (senza intercetta),
- $\eta \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\eta\to\pm\infty} x = \kappa_0 y^{1/\eta} = \kappa_0$, dove $\kappa_0 = c_0^{-1/\eta}$: variabile esplicativa fissa.

Elasticità dell'output ai fattori produttivi

Data la funzione di produzione $q = q(L, K)$, si definiscono:

- Elasticità della produzione all'utilizzo del lavoro

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{\partial q}{q} \Big/ \frac{\partial L}{L} = \frac{\partial q}{\partial L}\frac{L}{q} = \frac{\partial \ln q}{\partial \ln L} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_{q,L} = \frac{\mathrm{q}'_L}{\mathrm{qM}_L}$$

- Elasticità della produzione all'utilizzo del capitale

$$\varepsilon_{q,K} = \frac{\partial q}{q} \Big/ \frac{\partial K}{K} = \frac{\partial q}{\partial K}\frac{K}{q} = \frac{\partial \ln q}{\partial \ln K} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_{q,K} = \frac{\mathrm{q}'_K}{\mathrm{qM}_K}$$

14 Tecnologia - mer 12/03/2025

Elasticità di sostituzione

L'elasticità si sostituzione è un indicatore sintetico utilizzato in Economia per misurare il grado di sostituibilità tra input all'interno di un processo produttivo. La sua definizione analitica è

$$\sigma = \frac{\dfrac{\partial K/L}{K/L}}{\dfrac{\partial\,|\mathrm{SMST}(L,K)|}{|\mathrm{SMST}(L,K)|}} = \frac{\partial\, K/L}{\partial\,|\mathrm{SMST}(L,K)|}\frac{|\mathrm{SMST}(L,K)|}{K/L} = \frac{\partial \ln K/L}{\partial \ln |\mathrm{SMST}(L,K)|}$$

dove il rapporto K/L è detto **intensità di capitale**. Nell'ultima versione il SMST è in valore assoluto perché costituisce l'argomento della funzione logaritmo (condizione di esistenza).
L'elasticita si sostituzione assume valori positivi, cioè $\sigma \in [0, +\infty)$, infatti muovendosi lungo un dato isoquanto, accade che:

- se $K \uparrow$ (quindi $L \downarrow$) $\quad \Rightarrow \quad K/L \uparrow$ e $|\mathrm{SMST}(L,K,|) \uparrow \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial\, K/L}{\partial\,|\mathrm{SMST}(L,K)|} > 0$,
- se $L \uparrow$ (quindi $K \downarrow$) $\quad \Rightarrow \quad K/L \downarrow$ e $|\mathrm{SMST}(L,K,|) \downarrow \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial\, K/L}{\partial\,|\mathrm{SMST}(L,K)|} > 0$.

Quanto maggiore è l'elasticità di sostituzione, tanto maggiore è la possibilità di sostituire l'uno con l'altro gli input. Nel dettaglio:

- se $\sigma = 0 \Rightarrow$ input perfettamente complementari (isoquanto ad angolo retto, quindi $\dfrac{K}{L}$ costante),
- se $0 < \sigma < 1 \Rightarrow$ input complementari (isoquanto con elevata curvatura),
- se $\sigma \geq 1 \Rightarrow$ input sostituti (isoquanto con poca curvatura),
- se $\sigma \to \infty \Rightarrow$ input perfetti sostituti (isoquanto lineare, quindi SMST costante).

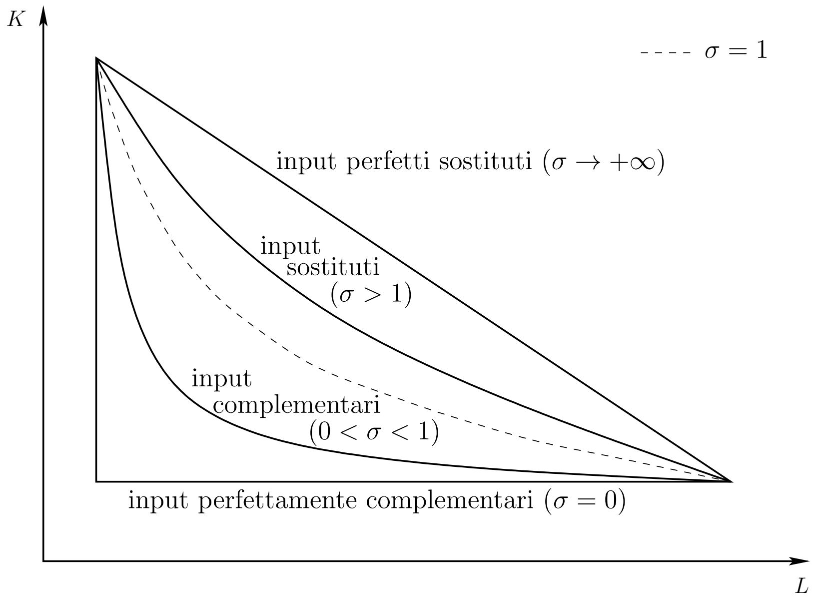


Grafico:

Regola pratico/mnemonica (non scientifica!) per ricordare come sono fatti gli isoquanti di produzione al variare dell'elasticità di sostituzione. Se $\sigma = 0$ gli isoquanti formano un angolo retto come i cateti, se $0 < \sigma < 1$ gli isoquanti hanno una curvatura molto vicina ai cateti, se $\sigma \geq 1$ gli isoquanti hanno una curvatura vicina all'ipotenusa, se $\sigma \to +\infty$ gli isoquanti sono lineari come l'ipotenusa.

Rendimenti di scala

Cosa accade all'output quando gli input sono aumentati tutti nella stessa proporzione?
La risposta sta nel grado di omogeneità della funzione di produzione $q(L, K)$.

Breve digressione matematica: funzioni omogenee

Una funzione di più variabili $y(x) = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è omogenea se può essere scritta come segue

$$y(t\,x) = t^s\,y(x),$$

dove $t > 0$ è una costante moltiplicativa (fattore di scala) e $s > 0$ è il **grado di omogeneità**.

Supponendo che la funzione di produzione sia omogenea di grado s risulta

$$q(t\,L, t\,K) = t^s\,q(L, K).$$

Rendimenti di scala:

decrescenti:	$0 < s < 1$	$\Rightarrow$	$q(t\,L, t\,K) < t\,q(L, K) \to$	utilizzando t volte gli input si ottiene meno di t volte l'output,
costanti:	$s = 1$	$\Rightarrow$	$q(t\,L, t\,K) = t\,q(L, K) \to$	utilizzando t volte gli input si ottiene esattamente t volte l'output,
crescenti:	$s > 1$	$\Rightarrow$	$q(t\,L, t\,K) > t\,q(L, K) \to$	utilizzando t volte gli input si ottiene più di t volte l'output.

[Grafico degli isoquanti e rendimenti di scala]

Nel breve periodo, la curva della produttività media fornisce immediatamente un'indicazione sui rendimenti di scala dell'impresa, infatti:

- Rendimenti di scala decrescenti (K è fisso, quindi qM_L decresce)
- Rendimenti di scala costanti (caso particolare in cui qM_L è costante)
- Rendimenti di scala crescenti (K è fisso, quindi qM_L cresce)

N.B.$\rightarrow$ Il concetto di Rendimento di scala è correlato a quello di Economia/Diseconomia di Scala. L'argomento verrà approfondito successivamente.

Retta di isocosto

Scelte dell'imprenditore $\nearrow$ funzione di produzione; $\searrow$ costo dei fattori produttivi

Se con w si indica il costo del lavoro in termini di salario orario, attraverso la variabile r si indica il costo di un'ora di utilizzo del capitale, il quale si identifica in

(a) interessi passivi sul capitale preso a prestito;

(b) costi opportunità, cioè i mancati guadagni derivanti dal fatto che l'investimento in capitale poteva essere destinata ad altri investimenti finanziari;

(c) ammortamento dovuto a usura e obsolescenza tecnologica;

(d) riparazioni.

Il costo totale (CT) dell'impresa è perciò

$$\text{CT} = wL + rK.$$

Questa funzione lineare rappresenta la **retta di isocosto** dell'impresa; esplicitando per K si ottiene

$$K = \frac{\text{CT}}{r} - \frac{w}{r}L.$$

isocosto: combinazioni lavoro-capitale che implicano il medesimo esborso monetario (costo totale). Proprietà:

- se CT $\uparrow$ la retta si allontana dall'origine,
- se $L = 0 \Rightarrow K = \dfrac{\text{CT}}{r}$,
- se $K = 0 \Rightarrow L = \dfrac{\text{CT}}{w}$,
- la sua inclinazione è data dal prezzo relativo degli input $-\dfrac{w}{r}$.

15 Combinazione ottima dei fattori produttivi - gio 13/03/2025

Scelta ottimale dell'impresa: trovare la combinazione ottimale di lavoro e di capitale (variabili L e K endogene) in modo da massimizzare il profitto dell'imprenditore. Generalmente si cerca di rendere minimi i costi totali (CT) avendo un vincolo sulla produzione $q = \bar{q}$ fornito da una commessa ricevuta. Le variabili salario (w), costo del capitale (r) e prezzo di vendita dell'output (p) sono determinate nei rispettivi mercati del lavoro, del capitale e del prodotto, quindi sono esogene.

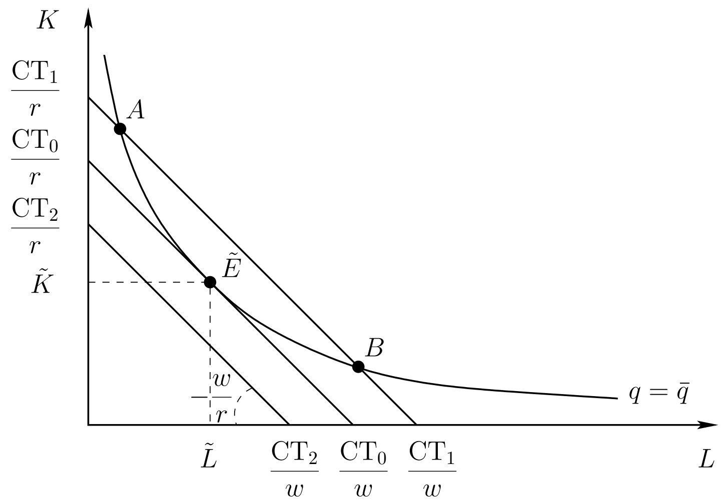


Grafico:

Tutti gli isoquanti che si trovano più in alto rispetto alla retta di isocosto si riferiscono a tecnologie inaccessibili per l'impresa, in quanto le combinazioni lavoro-capitale risultano essere troppo costose, cioè $wL + rK > \overline{\mathrm{CT}}$, dove $\mathrm{CT} = \overline{\mathrm{CT}}$ rappresenta un livello prefissato di costo totale che l'impresa decide di sostenere; viceversa tutti i tratti di isoquanto che si trovano al di sotto della retta di isocosto generano un costo $wL + rK < \overline{\mathrm{CT}}$. L'equilibrio è perciò raggiunto in corrispondenza del punto $\tilde{E}$ dove l'isoquanto di produzione è tangente alla più bassa retta di isocosto possibile. Le coordinate del punto $\tilde{E}$ rappresentano la combinazione ottima di fattori produttivi effettuabile dall'impresa.

Ricerca delle combinazione ottima dei fattori produttivi (soluzione):

$$\begin{cases} \min & \mathrm{CT} = wL + rK & \text{Retta di isocosto (funzione obiettivo)} \\ \text{sub} & q = q(L, K) & \text{Funzione di produzione (vincolo)} \end{cases}$$

Questo approccio potrebbe portare verso alcune complicazioni, soprattutto dal punto di vista tecnico/analitico.
Analiticamente, è consigliabile risolvere il sistema (generalmente semplifica i calcoli) considerando che il punto E di equilibrio dell'impresa è caratterizzato da due condizioni che devono verificarsi congiuntamente. La prima condizione è necessaria e si identifica nell'uguaglianza tra la pendenze dell'isoquanto e quella dell'isocosto, mentre la seconda dipende da come è impostato il problema.
Si hanno perciò due possibilità:

(a) Funzione di produzione nota

$$\begin{cases} |\mathrm{SMST}(L, K)| = \dfrac{w}{r} & \text{tangenza isoquanto-isocosto} \\ q(L, K) = \bar{q} & \text{il livello di produzione richiesto è } q = \bar{q}. \end{cases}$$

(b) Funzione di costo totale nota

$$\begin{cases} |\mathrm{SMST}(L, K)| = \dfrac{w}{r} & \text{tangenza isoquanto-isocosto} \\ wL + rK = \overline{\mathrm{CT}} & \text{il costo totale per l'impresa deve essere } \mathrm{CT} = \overline{\mathrm{CT}}. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene il **sentiero di espansione dell'impresa**, definito dalla relazione

$$|\mathrm{SMST}(L,K)| = \frac{w}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{q}'_L}{\mathrm{q}'_K} = \frac{w}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{q}'_L}{w} = \frac{\mathrm{q}'_K}{r}$$

è il luogo di punti corrispondente a tutte le combinazioni di input che minimizzano i CT di produzione all'aumentare dei livelli di output.

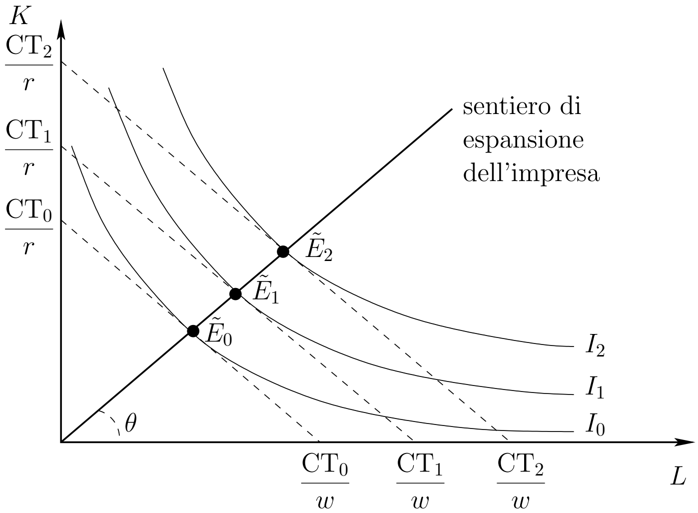


Grafico:

Il sentiero di espansione dell'impresa generalmente (non sempre!) è una semiretta uscente dall'origine che congiunge tutti i possibili punti di tangenza tra isoquanto ed isocosto i quali dipendono dalla quantità prodotta e/o dal livello di costo totale sopportato.

La soluzione del sistema di cui sopra è data dalle funzioni di **domanda condizionale di fattori produttivi**

$$\begin{cases} \tilde{L} = \tilde{L}(w, r, \bar{q}) & \text{domanda condizionale del fattore lavoro} \\ \tilde{K} = \tilde{K}(w, r, \bar{q}) & \text{domanda condizionale del fattore capitale.} \end{cases}$$

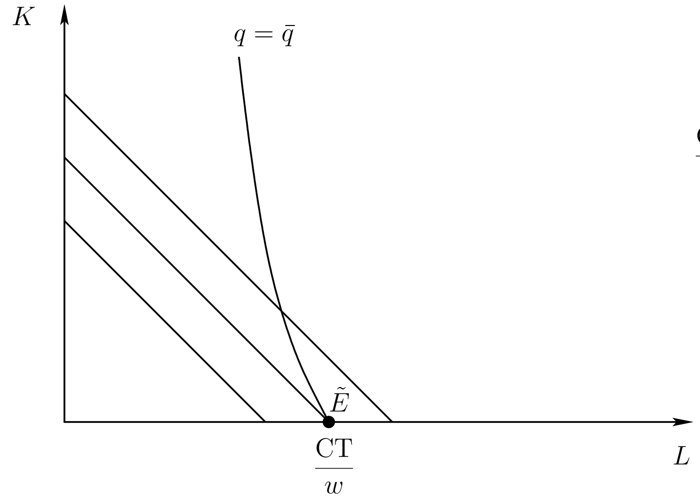
L'attributo "condizionale" deriva dal fatto che la domanda del singolo input è quella che l'impresa effettua sapendo di produrre una data quantità di output. La domanda condizionale di un fattore è pertanto una funzione di più variabili che comprende al suo interno le variabili esogene w, r e $\bar{q}$ poiché esplicita il rapporto tecnologico tra i due input variabili L e K.

Soluzioni d'angolo

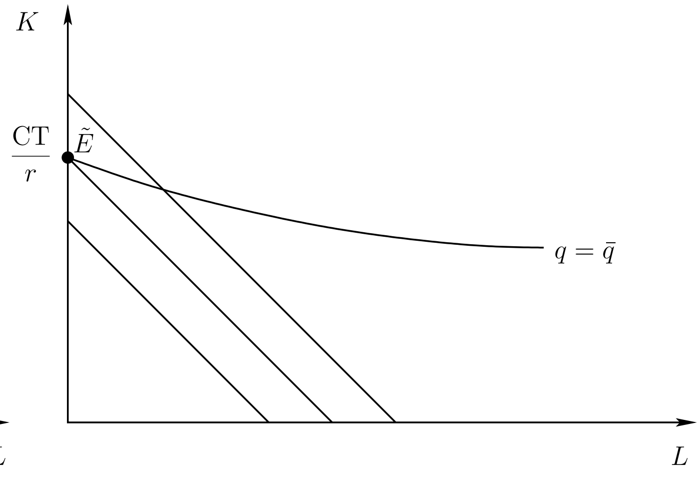
Casi particolari delle soluzioni d'angolo:

- se $|\mathrm{SMST}(L,K)| > \frac{w}{r}$ $\Rightarrow$ l'isoquanto ha sempre pendenza maggiore dell'isocosto, quindi l'impresa si collocherà in corrispondenza di $\tilde{L} = \frac{\mathrm{CT}}{w}$ e $\tilde{K} = 0$,
- se $|\mathrm{SMST}(L,K)| < \frac{w}{r}$ $\Rightarrow$ l'isoquanto ha sempre pendenza minore dell'isocosto, quindi l'impresa si collocherà in corrispondenza di $\tilde{L} = 0$ e $\tilde{K} = \frac{\mathrm{CT}}{r}$.

(a) $|\mathrm{SMST}(L,K)| > \dfrac{w}{r}$



(b) $|\mathrm{SMST}(L,K)| < \dfrac{w}{r}$



16 Forme funzionali (rigide) - gio 13/03/2025

Le forme funzionali in Economia sono state pensate per descrivere analiticamente in maniera accurata le funzioni stilizzate attraverso gli isoquanti di produzione.

Forme funzionali
- $\nearrow$ rigide o fisse: elasticità di sostituzione costante (Cobb-Douglas, CES)
- $\searrow$ flessibili: elasticità di sostituzione variabile (CES annidata, Diewert, Translog)

1. Cobb-Douglas

Breve digressione matematica: formula generale

$$y = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$$

con $x_i \geq 0$ quantità di input, $A > 0$ costante moltiplicativa, $\beta_i > 0$ parametri tecnologici per $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

In Economia Politica, per $n = 2$ (input Lavoro e Capitale), si ottiene la forma

$$q = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

dove $A > 0$ è il parametro di dimensione, mentre $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono i parametri tecnologici.

- Derivate seconde:
$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = \frac{\partial \mathrm{q}'_L}{\partial L} = \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{\beta} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial K^2} = \frac{\partial \mathrm{q}'_K}{\partial K} = \beta(\beta-1)AL^{\alpha}K^{\beta-2}.$$
La Cobb-Douglas è una funzione concava in L e K rispettivamente per $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$.
- $\mathrm{SMST}(L, K) = -\dfrac{\mathrm{q}'_L}{\mathrm{q}'_K} = -\dfrac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{K}{L}$.
- Sentiero di espansione dell'impresa (semiretta uscente dall'origine):
$$|\mathrm{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}L \qquad \Rightarrow \qquad K = \theta L.$$
- Omogeneità
$$A(tL)^{\alpha}(tK)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta} = t^{\alpha+\beta}q$$
I rendimenti di scala dipendono dalla somma $s = \alpha + \beta$ (funzione omogenea di grado $s = 1$ se $\alpha + \beta = 1$).
- Funzione log-lineare, quindi isoelastica rispetto ai fattori produttivi L e K
$$\ln q = \ln[AL^{\alpha}K^{\beta}] = \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K,$$
quindi:
  - elasticità della produzione all'utilizzo del lavoro: $\varepsilon_{q,L} = \dfrac{\partial \ln q}{\partial \ln L} = \alpha$,
  - elasticità della produzione all'utilizzo del capitale: $\varepsilon_{q,K} = \dfrac{\partial \ln q}{\partial \ln K} = \beta$.
- Elasticità di sostituzione: $\sigma = 1$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Se $|\mathrm{SMST}(L,K)| = \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L}$, allora risulta

$$\frac{K}{L} = \frac{\beta}{\alpha}|\mathrm{SMST}(L,K)|$$

quindi

$$\sigma = \frac{\partial K/L}{\partial|\mathrm{SMST}(L,K)|}\frac{|\mathrm{SMST}(L,K)|}{K/L} = \frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\alpha}}\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\beta}} = 1.$$

<u>Dimostrazione alternativa:</u> attraverso la trasformazione logaritmica applicata all'intensità di capitale si ottiene

$$\ln\frac{K}{L} = \ln\frac{\beta}{\alpha} + \ln|\mathrm{SMST}(L,K)|$$

quindi

$$\frac{\partial \ln K/L}{\partial \ln |\mathrm{SMST}(L,K)|} = 1$$

---

2. Constant Elasticity of Substitution (CES)

Breve digressione matematica: formula generale

$$q = A\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}\right]^{s/\rho}$$

con $x_i \geq 0$ quantità di input, $A > 0$ costante moltiplicativa, $s > 0$ parametro di scala, $\rho \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ parametro relativo all'elasticità di sostituzione e $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$, dove $\beta_i > 0$ sono parametri tecnologici per $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Per $n = 2$ (input Lavoro e Capitale) si ottiene la forma

$$q = A\left[\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho}\right]^{s/\rho},$$

dove A è il parametro di dimensione, s è il parametro di scala, $\alpha + \beta = 1$ sono parametri tecnologici entrambi positivi, mentre $\rho \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ è il parametro relativo all'elasticità di sostituzione.

- Funzione concava in L e K (senza dimostrazione).
- $\mathrm{SMST}(L,K) = -\frac{q'_L}{q'_K} = -\frac{\alpha \cancel{s}\cancel{A}\cancel{[\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho}]^{\frac{s}{\rho}-1}} L^{\rho-1}}{\beta \cancel{s}\cancel{A}\cancel{[\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho}]^{\frac{s}{\rho}-1}} K^{\rho-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}.$
- Sentiero di espansione dell'impresa (semiretta uscente dall'origine):

$$|\mathrm{SMST}(L,K)| = \frac{w}{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho} = \frac{w}{r} \quad\Rightarrow\quad K = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} L \quad\Rightarrow\quad K = \theta L.$$

- Omogeneità

$$A\left[\alpha(tL)^{\rho} + \beta(tK)^{\rho}\right]^{s/\rho} = A\left[t^{\rho}(\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho})\right]^{s/\rho} = t^{s}A\left[\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho}\right]^{s/\rho} = t^{s}q$$

  I rendimenti di scala dipendono dal parametro di scala s (funzione omogenea di grado 1 se $s = 1$).

- Elasticità di sostituzione: $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$

Dimostrazione:

Se $|\mathrm{SMST}(L,K)| = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\rho}$, allora risulta

$$\frac{K}{L} = \left[\frac{\beta}{\alpha}|\mathrm{SMST}(L,K)|\right]^{\frac{1}{1-\rho}}$$

quindi

$$\sigma = \frac{\partial K/L}{\partial|\mathrm{SMST}(L,K)|}\,\frac{|\mathrm{SMST}(L,K)|}{K/L} = \left[\frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}|\mathrm{SMST}(L,K)|^{\frac{1}{1-\rho}-1}\right]\frac{|\mathrm{SMST}(L,K)|}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}|\mathrm{SMST}(L,K)|^{\frac{1}{1-\rho}}} = \frac{1}{1-\rho}.$$

<u>Dimostrazione alternativa:</u> attraverso la trasformazione logaritmica applicata all'intensità di capitale si ottiene

$$\ln\frac{K}{L} = \frac{1}{1-\rho}\ln\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{1-\rho}\ln|\mathrm{SMST}(L,K)|,$$

quindi

$$\frac{\partial K/L}{\partial|\mathrm{SMST}(L,K)|} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Valutazione dell'elasticità di sostituzione di una funzione di produzione di tipo CES agli estremi dell'insieme di definizione del parametro ρ:

- se $\rho = 1 \Rightarrow \sigma \to +\infty$: input **perfetti sostituti** e la funzione CES diventa lineare.

$$q = A[\alpha L + \beta K]^s \qquad \text{(forma implicita)},$$
$$K = \frac{\tilde{q}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}L \qquad \text{(forma esplicita)}$$

dove $\tilde{q} = \left(\frac{q}{A}\right)^{1/s}$. In questo caso $\mathrm{SMST}(L,K)$ è costante e vale

$$\mathrm{SMST}(L,K) = -\frac{q'_L}{q'_K} = -\frac{\alpha s\cancel{A[\alpha L+\beta K]^{s-1}}}{\beta s\cancel{A[\alpha L+\beta K]^{s-1}}} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

- se $\rho \to -\infty \Rightarrow \sigma = 0$: input **perfettamente complementari** e la funzione CES mostra un angolo retto.

Dimostrazione:

Nell'ipotesi in cui $L < K$ (invertendo la disuguaglianza si ottiene una dimostrazione speculare) risulta

$$\lim_{\rho\to-\infty} q = \lim_{\rho\to-\infty} AL^s\left[\alpha + \beta\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}\right]^{s/\rho}$$

Poiché $(K/L)^\rho \to 0$, $\frac{s}{\rho} \to 0$ e $\alpha^{s/\rho} \to 1$, si ottiene

$$\lim_{\rho\to-\infty} q = A\,L^s \quad \text{se } L < K \qquad \left(\text{oppure } \lim_{\rho\to-\infty} q = A\,K^s \quad \text{se } L > K\right)$$

Generalizzando:

$$\lim_{\rho\to-\infty} q = A\min\{L^s, K^s\}.$$

- se $\rho \to 0 \Rightarrow \sigma = 1$: la CES converge ad una Cobb-Douglas.

Dimostrazione:

Dimostrazione: trasformazione logaritmica (continua e monotòna crescente):

$$\lim_{\rho\to 0} \ln q = \lim_{\rho\to 0}\left[\ln A + \frac{s}{\rho}\ln(\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho})\right] = \ln A + s \lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho})}{\rho}.$$

Applicando il Teorema di Hôpital, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} \ln q &= \ln A + s \lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha L^{\rho}\ln L + \beta K^{\rho}\ln K}{\alpha L^{\rho} + \beta K^{\rho}} && \text{poiché } L^{\rho}\to 1 \text{ e } K^{\rho}\to 1\\
&= \ln A + s \lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha\ln L + \beta\ln K}{\alpha+\beta} && \text{poiché } \alpha+\beta = 1\\
&= \ln A + s(\alpha\ln L + \beta\ln K)\\
&= \ln AL^{s\alpha}K^{s\beta}
\end{aligned}$$

Esponenziando si ottiene

$$e^{\ln q} = q = AL^{\alpha^*}K^{\beta^*}.$$

dove $\alpha^* = s\alpha$ e $\beta^* = s\beta$.

Esercizi 1 - lun 17/03/2025

Funzione di produzione

1. **(dall'esame del 11/02/2015)** Data la funzione di produzione $Q = 10\sqrt{LK}$, si calcoli la differenza tra produttività media e produttività marginale del lavoro nell'ipotesi in cui le quantità utilizzate dei fattori produttivi siano $L = 4$ e $K = 16$.

   [$\text{qM}_L - \text{q}'_L = 10$]

2. **(dall'esame del 05/06/2019)** Si consideri la funzione di produzione $q = 9L^{3/4}K^{1/4}$. Se la produttività marginale del capitale fosse pari a $\text{q}'_K = 22$, quale sarebbe il valore della produttività media del capitale (qM_K)? **[3 pt]**

   [$\text{qM}_K = 88$]

3. **(dall'esame del 17/09/2018)** Nel breve periodo, la funzione della produttività media del lavoro di un'impresa è una parabola di equazione $\text{qM}_L = 100 + 28L - L^2$. Si determini il valore L^* tale per cui questa funzione interseca quella della produttività marginale del lavoro.

   [$L^* = 14$]

4. **(dall'esame del 06/11/2017)** Data la funzione di produzione di lungo periodo $q(L, K) = 4\ln L + \ln K$, si calcoli il saggio marginale di sostituzione tecnica nel punto in cui l'utilizzo di L è 8 volte quello di K.

   [$\text{SMST}(L, K) = -0.5$]

5. **(dall'esame del 09/09/2015)** Si ipotizzi che la funzione di produzione di un'impresa sia $q = \ln L^2 + \ln K$, dove $L = 4$ e $K = 2$ sono rispettivamente le ore lavoro e le ore capitale impiegate. Sapendo che il saggio marginale di sostituzione tecnica è dato dalla funzione $\text{SMST}(L, K) = -2K/L$ e che l'impresa vuole produrre la stessa quantità di output utilizzando 2 ore lavoro in meno, quante ore in più di capitale dovrebbe impiegare?

   [$\Delta K = 2$]

6. **(dall'esame del 13/07/2016)** La funzione di produzione di un'impresa è data da $q = \left(22\sqrt{L} + \sqrt{K}\right)^2$. Nel breve periodo, l'impresa dispone di una quantità di lavoro uguale a quella del capitale. Si calcoli la produttività media del lavoro.

   $\left[\frac{q}{L} = 529\right]$

7. **(dall'esame del 18/09/2020)** Si consideri la funzione di produzione $q = 7L^{1/5}K^{1/2}$. Se il rapporto tra la produttività marginale del capitale (q'_K) e quella del lavoro (q'_L) è pari a 2 e le unità di lavoro sono $L = 4$, quante unità di capitale verranno impiegate?

   [$K^* = 5$]

8. **(dall'esame del 07/09/2022)** La relazione di breve periodo tra ore-lavoro (L) ed unità di output prodotto (q) è data nella seguente tabella. Si completi la tabella inserendo i corrispettivi valori di produttività media (qM_L) e di produttività marginale (q'_L) del lavoro. **[3 pt]**

L	0	1	2	3	4	5
q	0	15	60	90	120	135
qM_L	-					
q'_L	-					

[$\text{qM}_L = \{15,\ 30,\ 30,\ 30,\ 27\}; \text{q}'_L = \{15, 45, 30, 30, 15\}$]

Rendimenti di scala

9. La funzione di produzione di un'impresa è $q = K^{0.4}L^{0.1}$. Supponendo che l'impresa moltiplichi la scala di produzione (vale a dire entrambi gli input) per 3.24, determinate il rapporto tra il livello di produzione finale (q_1) ottenuto dopo l'aumento della scala ed il livello diproduzione iniziale (q_0).

$\left[\frac{q_1}{q_0} = 1.8\right]$

10. **(dall'esame del 13/07/2015)** Si assuma che la produzione abbia luogo utilizzando tre fattori produttivi: capitale K, lavoro non qualificato L e lavoro qualificato H. La tecnologia è tale per cui la funzione di produzione è $q = AK^{0.2}L^{0.5}H^{\beta}$, con $\beta > 0$. Si determini per quali valori di β la funzione di produzione esibisce rendimenti di scala decrescenti.

$[\beta < 0.3]$

11. **(dall'esame dell'08/02/2017)** La funzione completa di domanda per il bene x è $x = p_x^{a+b}p_y^bM^{a+2b}$, dove p_x è il prezzo del bene x, p_y è il prezzo del bene y e M è il reddito dell'individuo. Si determinino i valori dei parametri a e b tali per cui l'elasticità di x rispetto al proprio prezzo sia 0.7 e rispetto al reddito sia 1.4.

$[a = 0;\ b = 0.7]$

12. **(dall'esame del 29/06/2015)** Data la funzione di produzione $q = (L + K)^2$, l'impresa sta producendo $q = 39$ e l'imprenditore decide di raddoppiare la scala di produzione. Si calcoli l'aumento del livello di produzione ottenuto (Δq).

$[\Delta q = 117]$

13. **(dall'esame del 15/01/2018)** La funzione di produzione di un'impresa è data da $q = \sqrt{L + K}$. Per dati L e K, l'impresa produce $q = 145$. Se quadruplica l'utilizzo di entrambi gli input, quanto produce?

[nuovo livello di produzione $q = 290$]

14. **(dall'esame del 15/09/2017)** La funzione di produzione di un'impresa nel lungo periodo è data $q = \sqrt{L} + \sqrt{K}$, dove L e K rappresentano rispettivamente la quantità di lavoro e di capitale utilizzate. Supponendo che l'impresa attualmente produca la quantità $q_0 = 27$, a quanto ammonterebbe la produzione futura q_1 se si quadruplicasse l'utilizzo di entrambi i fattori produttivi?

$[q_1 = 54]$

15. **(dall'esame del 13/11/2012)** La funzione di produzione di un'impresa è $q = 4L^{0.05}K^{\beta}E^{0.1}$, dove i fattori produttivi contenuti sono il lavoro (L), il capitale (K) e l'energia (E). Si determini il valore del parametro β affinché sia possibile quadruplicare la quantità utilizzata di ciascun input, ottenendo una quantità quattro volte maggiore di output.

$[\beta = 0.85]$

16. **(dall'esame del 12/07/2019)** L'impresa *This Strange Engine* ha funzione di produzione $q = 2[L^{2/3} + K^{2/3} + F^{2/3}]^3$, dove L , K e F sono rispettivamente gli input lavoro, capitale ed energia. Nel 2018 l'impresa ha prodotto la quantità di output $q_{2018} = 4000$ barili di petrolio al mese e nel 2019 ha raddoppiato l'utilizzo di tutti i fattori produttivi. Quanto riuscirà a produrre?

$[q_{2019} = 16\,000]$

17. **(dall'esame del 18/01/2019)** A seguito della crescente paura verso gli immigrati e alle recenti estensioni sul diritto alla legittima difesa, un'impresa italiana che produce armi deve aumentare decisamente la propria produzione. La sua funzione di produzione è data da $q = L^{\alpha}K^{0.5}X^{0.95}$, dove L, K e X sono gli input lavoro, capitale e materie prime. Supponendo che l'impresa raddoppi l'utilizzo di tutti gli input, quale valore del primo coefficiente tecnico le permetterebbe di quadruplicare l'output prodotto? **[3 pt]**

$[\alpha = 0.55]$

18. **(dall'esame del 06/09/2019)** La funzione di produzione di un'impresa è $q = \left[\frac{1}{5}L^{0.2} + \frac{3}{5}H^{0.2} + \frac{1}{5}K^{0.2}\right]^{30}$, dove L sono le ore di lavoro non qualificato, H sono le ore di lavoro qualificato e K sono le ore di utilizzo del capitale. Se l'impresa decidesse di raddoppiare l'utilizzo di tutti i fattori produttivi, quale sarebbe il rapporto tra il nuovo output (q_1) ed il vecchio output (q_0)?

$\left[\frac{q_1}{q_0} = 64\right]$

19. **(dall'esame del 16/09/2019)** La tecnologia produttiva di un'impresa è descritta dalla funzione di produzione $q = 1000\min\{L, 2K\}$, dove L sono ore di lavoro e K sono le ore di capitale. Inizialmente l'impresa produce $q_0 = 10\,000$ unità, ma poi decide di aumentare del 50% l'utilizzo di entrambi i fattori produttivi. Qual è la variazione della quantità prodotta? *(si indichi il segno)*

$[\Delta q = +5\,000]$

20. **(dall'esame del 15/02/2022)** Data la funzione di produzione $q = \left(\alpha L^{1/7} + \beta K^{1/7}\right)^{\gamma}$, si indichi per quali valori del parametro γ la tecnologia produttiva ha rendimenti di scala crescenti.

$[\gamma = 7]$

21. **(dall'esame del 12/02/2024)** Un'impresa lavora con rendimenti di scala costanti. Sapendo che la sua funzione di produzione è $q = 3L^{\alpha}K^{0.5}E^{0.26}$, dove L, K e E sono gli input lavoro, capitale ed energia, si calcoli il valore dell'elasticità dell'output rispetto all'utilizzo del fattore lavoro.

$[\alpha = 0.24]$

22. **(dall'esame del 17/06/2024)** La tecnologia produttiva di un bene 'e descritta dalla funzione di produzione $q = (0.5L^{\rho} + 0.5K^{\rho})^{0.25/\rho}$. Si calcoli la variazione percentuale dell'output nel caso in cui gli input raddoppiassero. (**Suggerimento:** si arrotondi la variazione percentuale alla seconda cifra decimale)

$\left[\frac{\Delta q}{q} = 18.92\%\right]$

Elasticità di sostituzione, Elasticità rispetto all'utilizzo dei fattori produttivi

23. **(dall'esame del 08/09/2014)** Nella funzione di produzione di un'impresa l'unico input variabile è il lavoro (L) per il quale la produttività marginale è costante pari a $q'_L = 4$; sapendo che l'impresa produce la quantità $q = 240$ utilizzando 120 ore lavoro, si determini l'elasticità della produzione rispetto ad L.

$[\varepsilon_{q,L} = 2]$

24. **(dall'esame del 08/02/2017)** Si consideri la funzione di produzione $q = L^{0.1}K^{0.4}$. Si indichi il tipo di rendimenti di scala e si calcoli il rapporto, nel piano (L, K), tra il valore assoluto del saggio marginale di sostituzione tecnica e l'intensità di capitale (rapporto K/L).

$$\left[\frac{|\text{SMST}(L,K)|}{K/L} = 0.25;\ \text{rendimenti di scala decrescenti}\right]$$

25. **(dall'esame del 23/09/2015)** Si consideri la funzione di produzione $Y = K^{0.1}L^{0.1}$. Si calcoli il rapporto il tra saggio marginale disostituzione tecnica e l'intensità di capitale; si stabilisca inoltre il tipo di rendimenti di scala.

Rendimenti di scala crescenti ◯
Rendimenti di scala costanti ◯
Rendimenti di scala decrescenti ◯

$$\left[\frac{|\text{SMST}(L,K)|}{K/L} = 1;\ \text{rendimenti di scala decrescenti}\right]$$

Combinazione ottima dei fattori produttivi

26. **(dall'esame del 07/06/2016)** Si determinino le quantità di lavoro (L) e di capitale (K) domandate da un'impresa con funzione di produzione $q = 0.25(\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$, sapendo che riceve una commessa di $q = 45$ unità di output e che i costi dei fattori produttivi hanno lo stesso valore.

$[L^* = 45,\ K^* = 45]$

27. **(dall'esame del 17/01/2020)** Sia $q = 140(LK)^{1/4}$ la funzione di produzione di una impresa. Sapendo che $q^* = 5040$ è la quantità ottimale scelta dall'impresa e che il prezzo di un'ora lavoro (L) è pari a 4 volte il prezzo di un'ora capitale (K), si calcolino le quantità ottimali di L e K.

$[L^* = 648,\ K^* = 2592]$

28. **(dall'esame del 16/09/2019)** La funzione di produzione di un'impresa è $q = L(K - 2)$. I prezzi dei fattori produttivi sono $w = 2$€ e $r = 2$€. Si determini la combinazione ottima di fattori produttivi sapendo che l'impresa può sopportare un costo totale pari a CT = 100€.

$[L^* = 24,\ K^* = 26]$

29. **(dall'esame del 03/07/2013)** La tecnologia dell'impresa DITTA dipende dall'utilizzo dei due fattori L e K ed è uguale a $q = 2K + 8L$. Dati i prezzi $w = 6$€ e $r = 4$€ e dato che l'impresa deve produrre la quantità $q = 3000$, si determini la quantità utilizzata dei due fattori produttivi.

$[(L, K) = (375, 0)]$

30. **(dall'esame del 12/02/2018)** Un'impresa con tecnologia data dalla funzione di produzione $q = L^{3/5}K^{2/5}$ riceve una commessa per produrre $q = 32$. Considerando che un'unità di lavoro L costa $w = 15$€ e un'unità di capitale K costa $r = 10$€, si determini la quantità ottimale di lavoro che sarà impiegata da questa impresa.

$[L^* = 32]$

31. **(dall'esame del 07/09/2018)** Un'impresa produce con una tecnologia descritta dalla funzione di produzione $q = 4L^{0.5}K^{0.5}$ e sostiene un costo per l'utilizzo di un'unità di lavoro L e di capitale K pari rispettivamente a $w = 10$€ e $r = 10$€. Si determini la domanda di lavoro $(\tilde{L})$ se l'impresa dovesse produrre $q = 6000$ unità di output.

$\left[\tilde{L} = 1500\right]$

32. **(dall'esame del 05/06/2013)** La funzione di produzione di un'impresa è $q = \sqrt{LK}$, dove il lavoro (L) ed il capitale (K) sono entrambi **input variabili**. L'impresa riceve una commessa per la produzione di q unità, che saranno pagate ognuna al prezzo $p = 100$€. L'imprenditore sa che, per accettare la commessa, deve sostenere costi fissi pari a CF = 470€, che il costo del lavoro è $w = 6$€, mentre quello del capitale è $r = 1.5$€. Qual è il livello minimo della commessa $(q = q_{\min})$ che permette di ottenere profitti non negativi?

$[q_{\min} = 5]$

33. **(dall'esame del 06/09/2019)** Un'impresa che lavora su commessa ha una tecnologia produttiva descritta dalla funzione di produzione $q = 0.2L^{0.5} + 0.8K^{0.5}$, dove L sono le ore di lavoro e K le ore di capitale. Il prezzo del capitale è $r = 1$€. Se ricevendo una commessa di 33 unità decidesse di usare $L = 25$ ore di lavoro, a quanto ammonterebbe il salario orario w?

$[w = 2$€$]$

34. **(dall'esame del 18/01/2019)** Nel lungo periodo la funzione di produzione di un'impresa è $q(L, K) = 2\sqrt{LK}$. Sapendo che il costo del capitale pari a $r = 3$€, si determini il livello del salario orario (w) in modo tale che l'impresa scelga la combinazione $L^* = K^*$.

$[w^* = 3$€$]$

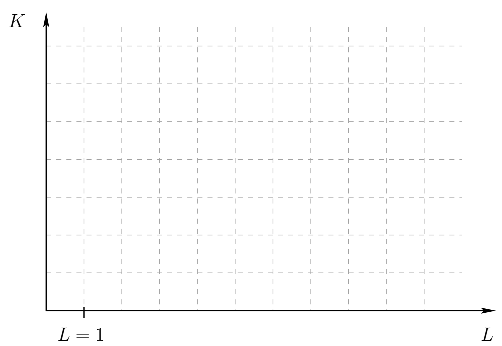
35. **(dall'esame del 05/06/2019)** In un mercato vi sono 100 imprese con identica funzione di produzione $q = L + LK$, dove L e K indicano rispettivamente le ore di utilizzo di lavoro e capitale. Supponete che il prezzo del capitale sia pari a $r = 1$€ e che ogni impresa produca $q = 900$ unità. Se le ore di lavoro complessivamente utilizzate nell'intero mercato (da tutte le imprese) fossero pari a $L^* = 1000$, quale sarebbe il salario orario in quel mercato? **[3 pt]**

$[w = 9$€$]$

36. **(dall'esame del 12/07/2017)** La funzione di produzione di lungo periodo di un'impresa è $q = L^{0.1}K^{0.4}$, dove L è il lavoro e K ilcapitale. Si determini l'elasticità della domanda condizionale di lavoro rispetto all'output q, se il costo del lavoro è $w = 10$€ e quello del capitale è $r = 10$€.

$[\varepsilon_{L^*,q} = 2]$

37. **(dall'esame del 09/09/2015)** Data la funzione di produzione $q = 3L^{0.2}K^{0.3}$, sapendo che un'ora lavoro costa come un'ora di utilizzo del capitale, si disegni il sentiero di espansione dell'impresa indicando il valore dell'ordinata nel punto $L = 1$. **[3 pt]**



[ordinata=1.5]

17 Funzioni di costo di breve periodo - mar 18/03/2025

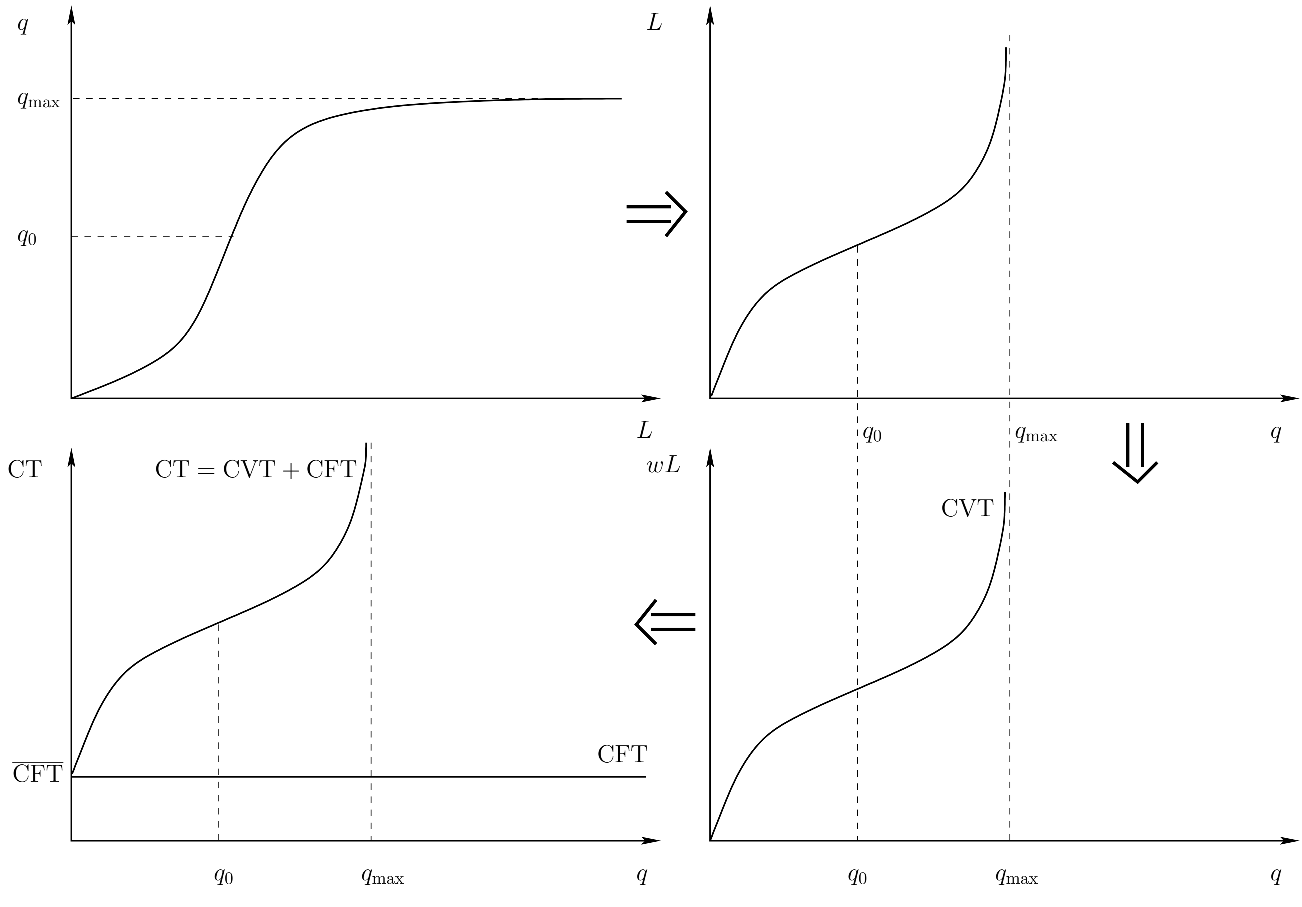
Ipotesi:

1. breve periodo: si suppone che un input sia mantenuto fisso (tipicamente $K = \bar{K}$);
2. la funzione di produzione $q = q(L, \bar{K})$ è una funzione biunivoca rispetto al lavoro, quindi è invertibile $\Rightarrow L = L(q)$;
3. l'isocosto dipende dal solo costo per il lavoro (input variabile), quindi la funzione CT è esprimibile come funzione dell'output prodotto, cioè

$$\mathrm{CT} = wL + rK = wL(q) + r\bar{K} = \mathrm{CVT} + \mathrm{CF},$$

dove CVT è il **Costo Variabile Totale** e CF è il **Costo Fisso**.

Utilizzando una funzione di produzione <u>neoclassica</u> con la «forma a S», graficamente risulta:



Proprietà della funzione CT

1. In generale, è funzione di q, w e r. Per semplicità, nel corso sarà esclusivamente $\mathrm{CT} = \mathrm{CT}(q)$.
2. Non può assumere valori negativi, generalmente vale $\mathrm{CT} > 0$ ($\mathrm{CT} = 0$ è un caso particolarissimo).
3. Funzione non decrescente rispetto al livello di produzione, quindi $\dfrac{\partial \mathrm{CT}}{\partial q} \geq 0$.
4. Può essere lineare, concava o convessa.
5. Ha intercetta solo se ci sono costi fissi.

Costo Medio e Costo Marginale

$$\text{Costo Medio} \begin{cases} \nearrow & \text{Totale:} & \text{CMT} = \dfrac{\text{CT}}{q} \text{ (curva neoclassica con la «forma a U»)} \\ \rightarrow & \text{Variabile:} & \text{CMV} = \dfrac{\text{CVT}}{q} \text{ (curva neoclassica con la «forma a U»)} \\ \searrow & \text{Fisso} & \text{CMF} = \dfrac{\text{CF}}{q} \text{ (iperbole)} \end{cases}$$

Costo Marginale: costo di una unità aggiuntiva di output, è dato da $\text{C}' = \dfrac{\partial \text{CT}}{\partial q}$. Quando si utilizza la curva neoclassica dei CT, il l'andamento della curva C′ configura una «forma a U».
Proprietà analitiche reciproche:

1. $\text{CMT} = \text{CMV} + \text{CMF}$,
2. $\lim_{q \to \infty} \text{CMV} = \text{CMT}$ (perché $\lim_{q \to \infty} \text{CMF} = 0$),
3. $\text{CVT} = \text{CMV}\, q_0$ oppure $\text{CVT} = \int_0^{q_0} \text{C}'\, d\, q$,
4. $\text{C}' = \dfrac{\partial \text{CT}}{\partial q} = \dfrac{\partial \text{CVT}}{\partial q} = w \dfrac{\partial L}{\partial q} = \dfrac{w}{\text{q}'_L}$,
5. $\text{CMV} = \dfrac{\text{CVT}}{q} = \dfrac{wL}{q} = \dfrac{w}{\text{qM}_L}$.

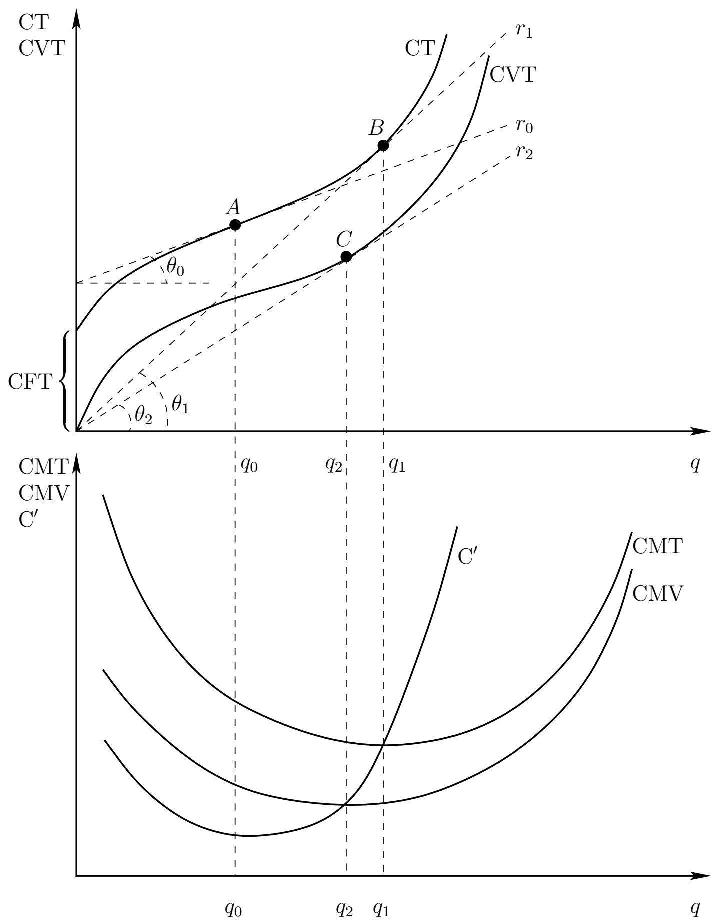


Grafico:

La curva C$'$ è data dalla pendenza della retta tangente nei punti della funzione di costo totale (CT) oppure in quella di costo variabile totale (CVT), poiché vale sempre l'uguaglianza $\mathrm{C}' = \dfrac{\partial \mathrm{CT}}{\partial q} = \dfrac{\partial \mathrm{CVT}}{\partial q}$ (la derivata dei costi fissi rispetto alla produzione è infatti nulla). Le curve CT e CVT sono identiche e la loro distanza verticale è pari a CF, quindi in corrispondenza della stessa ascissa la tangente ha la stessa pendenza. Ad esempio, in $q = q_0$ entrambe queste curve mostrano un flesso e la curva C$'$ assume valore minimo (la retta tangente a CT è r_0).

Le curve CMT e CMV sono ottenute dalla pendenza della retta secante che congiunge l'origine a ciascun punto delle funzioni CT e CVT(ad esempio, nel punto di flesso A la secante è la retta r_2).

Si noti che la curva C$'$ interseca entrambe le curve di costo medio in corrispondenza del loro punto di minimo.

N.B.$\rightarrow$ La tecnica per ricavare le curve di costo medio e di costo marginale dalla curva di costo totale sono esattamente le stesse utilizzate nella figura a pag. 22 per l'ottenimento delle curve q'_L e qM_L dalla funzione di produzione di breve periodo.

Generalmente la curva di costo marginale interseca quella di costo medio totale nel suo punto di minimo.

Dimostrazione:

Derivando la funzione CMT ad q

$$\frac{\partial \mathrm{CMT}}{\partial q} = \frac{\partial \mathrm{CT}/q}{\partial q} = \frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial q} q - \frac{\partial q}{\partial q}\mathrm{CT}\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial q} - \frac{\mathrm{CT}}{q}\right) = \frac{1}{q}(\mathrm{C}' - \mathrm{CMT})$$

- se $\mathrm{C}' > \mathrm{CMT} \Rightarrow$ CMT è crescente,
- se $\mathrm{C}' = \mathrm{CMT} \Rightarrow$ CMT è minima,
- se $\mathrm{C}' < \mathrm{CMT} \Rightarrow$ CMT è decrescente.

[Grafico dei CMT, dei CMV e dei CMF "neoclassici"]

18 Funzioni di costo di lungo periodo, Massimo profitto - mer 19/03/2025

Nel lungo periodo sia il fattore lavoro (L), sia il fattore capitale (K) sono variabili, quindi l'impresa può determinare la loro ottima combinazione all'interno del processo produttivo. In questo caso non esiste più la distinzione tra costi fissi e costi variabili. La funzione CT (costo minimo da sopportare per produrre un dato livello di output) è perciò funzione della domanda condizionale di fattori produttivi, quindi

$$\mathrm{CT} = w\,\tilde{L}(q, w, r) + r\,\tilde{K}(q, w, r)$$

che dipende da

1. costo unitario degli input w e r (variabili esogene),
2. quantità di output (q) che l'impresa intende produrre.

N.B.$\rightarrow$ Per non appesantire la notazione, in Economia Politica gli acronimi delle curve di costo (CT, CMT, C$'$, ecc.) non contengono le variabili q, w e r.

Dal punto di vista della definizione analitica e dell'andamento grafico, generalmente le curve di costo di lungo periodo sono simili a quello delle omologhe curve di breve periodo.
La curva di costo medio di lungo periodo verrà identificata attraverso l'acronimo "CM" perché, in assenza di costi fissi, la distinzione tra costi medi totali (CMT) e costi medi variabili (CMV) non ha più senso.

Economie e Diseconomie di Scala

Nel lungo periodo i rendimenti di scala definiscono la forma delle curve di costo dell'impresa.

Economie di Scala: il costo medio totale dell'impresa diminuisce al crescere della produzione

$$\frac{\partial \mathrm{CM}}{\partial q} < 0 \qquad \text{dove} \qquad \mathrm{CM} > \mathrm{C}'$$

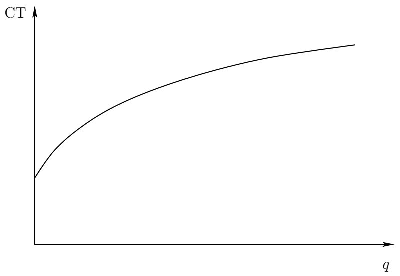
Diseconomie di Scala: il costo medio totale dell'impresa aumenta al crescere della produzione.

$$\frac{\partial \mathrm{CM}}{\partial q} > 0 \qquad \text{dove} \qquad \mathrm{CM} < \mathrm{C}'$$

Curva di costo medio (CM) e costo marginale (C$'$) **neoclassiche** (con ≪forma ad U≫):

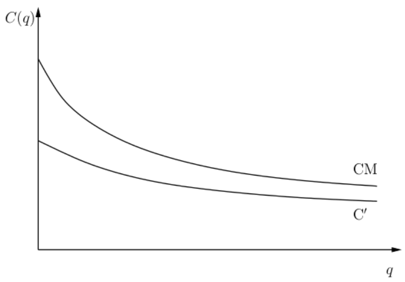
- economie di scala nel tratto decrescente della curva CM (C$'$ può essere crescente),
- rendimenti costanti di scala nel punto di minimo della curva CM (C$'$ è crescente),
- diseconomie di scala nel tratto crescente della curva CM (C$'$ è sicuramente crescente).

CT concava



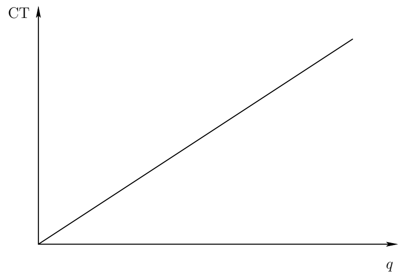
$\Downarrow$

Rendimenti di scala crescenti (Ec. scala)



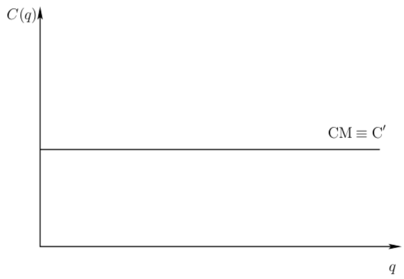
CM $>$ C$'$

CT lineare



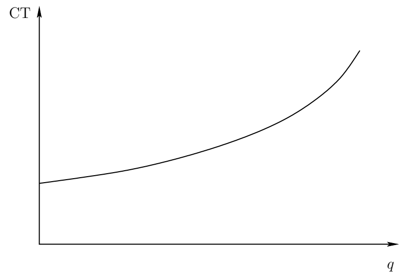
$\Downarrow$

Rendimenti di scala costanti



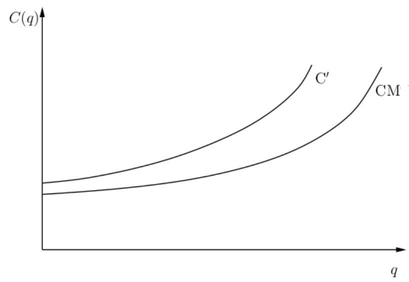
CM $\equiv$ C$'$

CT convessa



$\Downarrow$

Rendimenti di scala decrescenti (Disec. scala)



CM $<$ C$'$

Massimo profitto

Dato che l'obiettivo dell'impresa è la massimizzazione del profitto, allora la quantità di output prodotta dalla stessa deve essere tale per cui risulti

$$
\begin{aligned}
\max_q \Pi &= \mathrm{RT} - \mathrm{CT} \\
&= pq - \mathrm{CT}(q),
\end{aligned}
$$

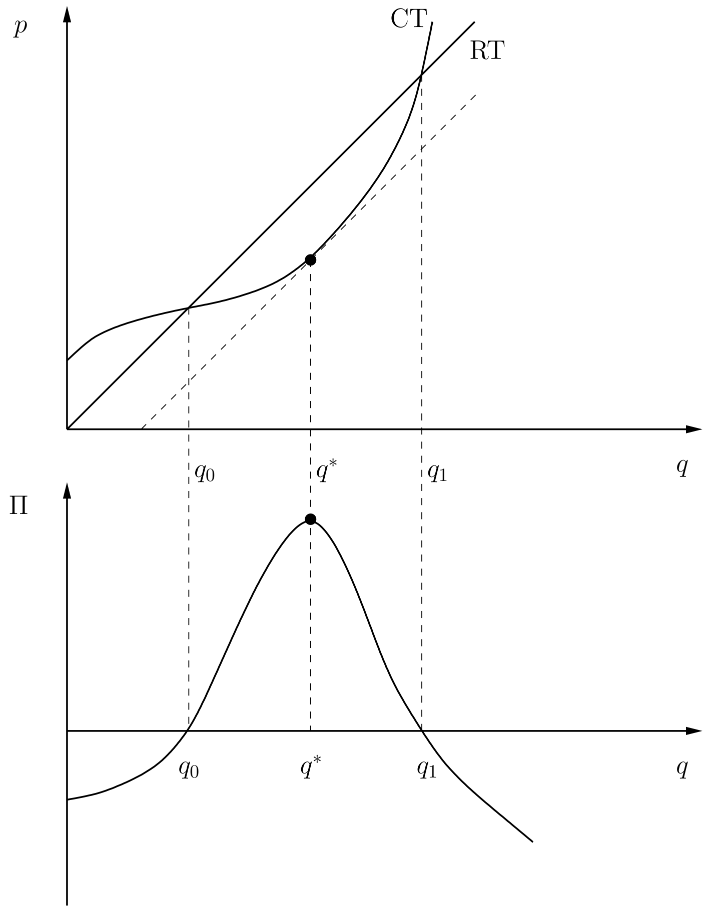
dove $\Pi = \Pi(q)$ è il profitto, mentre RT è il **Ricavo Totale** dell'impresa ed il prezzo è esogeno. Analiticamente si ha perciò

$$
\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \mathrm{RT}}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{CT}}{\partial q} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{R}' = \mathrm{C}'
$$

dove $\mathrm{R}' = \dfrac{\partial \mathrm{RT}}{\partial q}$ sono il ricavo marginale, cioè i ricavi ottenuti con una unità aggiuntiva di output.

L'impresa massimizza il proprio profitto (quindi è in equilibrio) quando i suoi costi marginali eguagliano i suoi ricavi marginali.

Graficamente, la massima distanza tra la curva RT e la curva CT si ottiene nel punto in cui la retta tangente alla curva CT ha la stessa inclinazione della retta RT (quindi è parallela a RT).



In corrispondenza del livello $q = q^*$ l'impresa massimizza il profitto, cioè si colloca in corrispondenza del livello di produzione che rende massima la distanza (verticale) tra le curve di RT e CT.

Equilibrio dell'impresa sul mercato concorrenziale

Poiché in un mercato concorrenziale vale sempre $\mathrm{RT} = p^*q$, con p^* esogeno, allora vale sempre la relazione

$$\mathrm{R}' = \mathrm{RM} = p^*,$$

dove $\mathrm{RM} = \dfrac{\mathrm{RT}}{q}$ sono i **ricavi medi**; si tenga presente che la funzione di ricavo medio dell'impresa di fatto coincide sempre con la funzione inversa di domanda $p(q)$, infatti

$$\text{se } \mathrm{RT} = p(q)\,q \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{RM} = \frac{\mathrm{RT}}{q} = \frac{p(q)\,q}{q} = p(q).$$

Questa relazione rimane valida anche nel caso, tipico sul mercato concorrenziale, nel quale il prezzo è dato (esogeno) e vale $p = p^*$.
L'impresa massimizza perciò il proprio profitto quando

$$\mathrm{C}' = p^*.$$

19 Funzione di offerta di beni e servizi, Domanda non condizionale di input - gio 20/03/2025

Offerta di beni e servizi sul mercato concorrenziale

- **curva di offerta dell'impresa di breve periodo:** determinata dalla curva C$'$ per $p^* \geq \text{CMV}(q^*)$

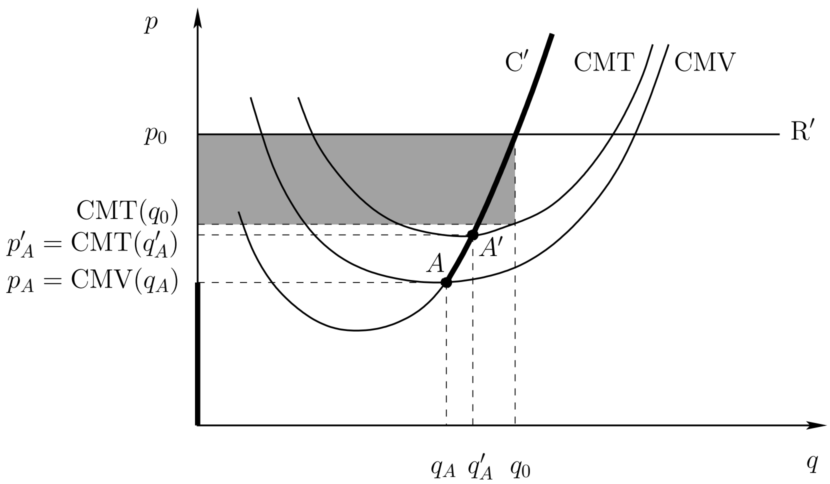
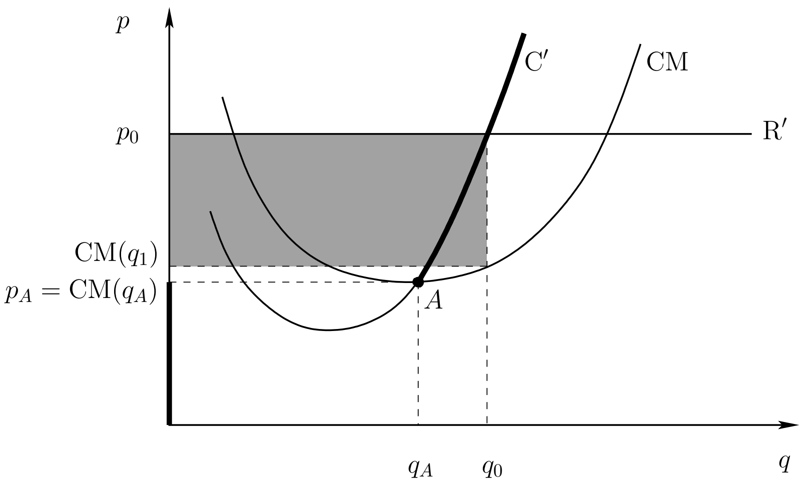


Grafico:

In corrispondenza del punto E vale la relazione C$' = p^*$, quindi si determina la quantità di equilibrio q^*. L'area colorata è l'extraprofitto perché il livello $p = p^*$ consente all'impresa di coprire i CMT, cioè

$$\Pi = \text{RT}(q^*) - \text{CT}(q^*) = p^*q^* - \text{CMT}(q^*)q^* = [p^* - \text{CMT}(q^*)]q^*.$$

- **curva di offerta dell'impresa di lungo periodo:** determinata dalla curva C$'$ per $p^* \geq \text{CM}(q^*)$



In entrambi i casi la condizione di equilibrio C$' = p^*$ è sempre garantita.

Grafico:

Il punto A è detto **punto di chiusura**, perché per valori di prezzo inferiore a p_A l'impresa esce dal mercato (quindi non produce) dato che non è in grado di coprire i suoi costi variabili.

L'uguaglianza C$' = p^*$ rappresenta:

- condizione sufficiente affinché l'impresa sia in equilibrio,

- condizione non sufficiente affinché l'impresa consegua extraprofitti, infatti:
  - se $p^* > \mathrm{CMT}(q^*)$: l'impresa è in equilibrio e consegue extraprofitti,
  - se $\mathrm{CMV}(q^*) < p^* < \mathrm{CMT}(q^*)$: l'impresa è in equilibrio ma non consegue extraprofitti, tuttavia è incentivata a continuare la produzione poiché riesce a coprire i costi variabili (soprattutto se i costi sono non recuperabili o *sunk costs*),
  - se $p^* < \mathrm{CMV}(q^*)$: l'impresa è in equilibrio, ma ha convenienza a cessare l'attività (uscita dal mercato) perché non copre neppure i costi variabili.

[Grafico dell'equilibrio per diversi valori di p^*]

Domanda di lavoro e domanda di capitale

Poiché le variabili esogene al comportamento dell'impresa sono il prezzo del proprio prodotto sul mercato (p), il livello dei salari (w) ed il costo del capitale (r) la quantità ottimale dell'impresa dipenderà dalle stesse variabili, quindi $q^* = q^*(p, w, r)$. Dalla funzione di profitto calcolata in $q = q^*$ si ottiene il profitto massimo

$$\begin{aligned}\Pi &= \mathrm{RT}(q^*) - \mathrm{CT}(q^*)\\ &= p\,q^* - wL(q^*, w, r) - rK(q^*, w, r)\\ &= p\,q^* - wL(q^*(p, w, r), w, r) - rK(q^*(p, w, r), w, r)\\ &= p\,q^* - wL^*(p, w, r) - rK^*(p, w, r),\end{aligned}$$

dove $\tilde{L}(p, w, r)$ e $\tilde{K}(p, w, r)$ sono rispettivamente la **domanda non condizionale di lavoro** e la **domanda non condizionale di capitale**. L'attributo "non condizionale" indica che l'impresa domanda tali quantità degli input senza avere il vincolo della commessa effettuata dal cliente. In pratica, l'impresa produce la quantità che le permette di massimizzare il profitto ($q = q^*$) e non la quantità concordata col cliente ($q = \bar{q}$).

Poiché l'obiettivo dell'impresa è massimizzare il profitto $\Pi = \mathrm{RT} - \mathrm{CT}$, per determinare la quantità ottimale di lavoro e di capitale all'interno del processo produttivo occorre risolvere il problema di massimo in maniera alternativa: in altre parole, occorre soddisfare entrambe le condizioni del prim'ordine

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Pi}{\partial L} = 0\\[2mm] \dfrac{\partial \Pi}{\partial K} = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{RT}}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial L} - \dfrac{\partial \mathrm{CT}}{\partial L} = 0\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{RT}}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial K} - \dfrac{\partial \mathrm{CT}}{\partial K} = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}p\mathrm{q}'_L - w = 0\\[2mm] p\mathrm{q}'_K - r = 0,\end{cases}$$

quindi risulta

$$\begin{cases}\mathrm{q}'_L = \dfrac{w}{p}\\[2mm] \mathrm{q}'_K = \dfrac{r}{p}\end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases}w = p\mathrm{q}'_L = \mathrm{Vq}'_L & \text{(domanda inversa di lavoro)}\\[2mm] r = p\mathrm{q}'_K & \text{(domanda inversa di capitale),}\end{cases}$$

dove il rapporto $\dfrac{w}{p}$ è il **salario reale** e Vq'_L è **produttività marginale in valore**. Funzioni di domanda non condizionale dei fattori produttivi in forma semplificata:

- domanda di lavoro: $L^d = L^*(w) \quad \Rightarrow \quad$ inversa: $w = w(L) \quad \Rightarrow \quad$ se $w \uparrow \Rightarrow L \downarrow$,
- domanda di capitale: $K^d = K^*(r) \quad \Rightarrow \quad$ inversa: $r = r(K) \quad \Rightarrow \quad$ se $r \uparrow \Rightarrow K \downarrow$.

Relativamente al lavoro (per il capitale valgono le stesse conclusioni)

- se $\mathrm{q}'_L > \dfrac{w}{p} \Rightarrow$ l'impresa assume lavoratori,
- se $\mathrm{q}'_L < \dfrac{w}{p} \Rightarrow$ l'impresa effettua licenziamenti.

Si tenga presente che $\mathrm{Vq}'_L = p\,\mathrm{q}'_L$ di fatto è un'«amplificazione» della produttività marginale dovuta al valore di p (costante ed esogeno) per cui tutte le sue proprietà di crescenza/decrescenza sono mantenute.

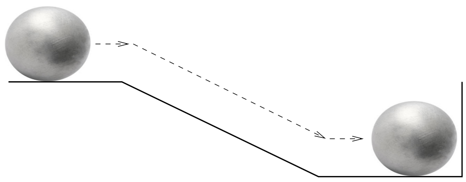
N.B.→ Più realisticamente la curva di domanda di lavoro coincide col tratto decrescente della curva Vq'_L, quindi risulta il seguente schema per il mercato del lavoro.

[grafico della curva di domanda di lavoro]

20 Analisi di Statica Comparata, Aggregazione - gio 20/03/2025

Cosa accade al mercato quando mutano le condizioni di equilibrio?
Cosa accade quando un mercato non si trova in equilibrio?

L'Analisi di Statica Comparata è il confronto tra due situazioni diverse determinatesi a seguito di un mutamento nelle condizioni di equilibrio. Essa si limita ad analizzare due situazioni, quella di partenza e quella di arrivo, ma non si occupa della dinamica del passaggio.



La statica comparata spesso viene illustrata attraverso il movimento di una sfera posta al di sopra di un piano inclinato: inizialmente la sfera è ferma (equilibrio iniziale), poi viene spinta (variazione) ed infine si ferma al fondo della discesa (equilibrio finale).

Variazioni dei prezzi dei fattori produttivi

Cosa accade se aumenta il costo di produzione di una data quantità di output?

- Aumento del salario: se $w \uparrow$ la curva di isocosto mantiene (inizialmente) l'intercetta, ma aumenta la pendenza.

Caso 1: input sostituti ($\sigma \geq 1$, $\varepsilon_{K,w} > 0$)

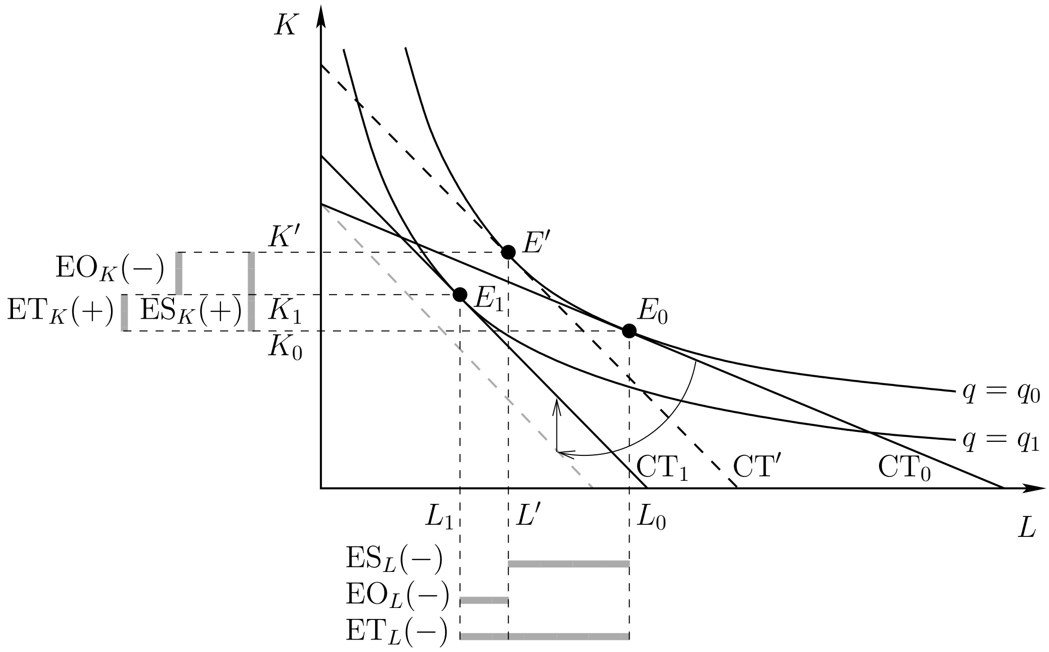


Grafico:

L'equilibrio iniziale dell'impresa è nel punto E_0 in corrispondenza del quale c'è tangenza tra isoquanto ed isocosto. Quando $w \uparrow$, la curva iniziale di isocosto CT_0 ruota verso l'interno (aumento del coefficiente angolare w/r) diventando la linea grigia tratteggiata più vicina all'origine.
Se l'impresa volesse restare sull'isoquanto iniziale, quindi volesse continuare a produrre la quantità $q = q_0$ anche a seguito dell'aumento di w, si determinerebbe una situazione teorica nella quale si sostituirebbe il lavoro col capitale: l'impresa si collocherebbe perciò nel punto E' in corrispondenza della tangenza tra l'isoquanto e la retta

di isocosto tratteggiata più lontana dall'origine (isocosto "fittizio").
L'equilibrio E' non è accessibile all'impresa poiché giace oltre la retta di isocosto tratteggiata grigia. Razionalmente all'impresa conviene ridurre la produzione al livello $q = q_1$, passando così ad un isoquanto più vicino all'origine. L'equilibrio finale si ottiene perciò nel punto E_1 che rappresenta il punto di tangenza tra il nuovo isoquanto e l'isocosto CT_1 ottenuto perché l'impresa si accolla un costo totale maggiore di quello di partenza ($w \uparrow$, quindi anche CT $\uparrow$), in quanto l'intercetta CT$/r$ della retta di isocosto è aumentata.

	$\nearrow$	Effetto sostituzione	$\rightarrow$	cambia il prezzo relativo: lungo lo stesso isoquanto si sostituisce l'input divenuto più costoso con l'altro
Effetto totale				
	$\searrow$	Effetto output	$\rightarrow$	riduzione della produzione: si passa ad un isoquanto più "basso" perché l'isocosto si è ridotto

Effetto	descrizione	input L	input K
Sostituzione **(ES)**	passaggio da E_0 ad E'	-	+
Output **(EO)**	passaggio da E' ad E_1	-	-
Totale **(ET=ES+EO)**	passaggio da E_0 ad E_1	-	+

Per il fattore produttivo K si ha ES > 0 e EO < 0. Poiché ET > 0 allora si dice che "l'effetto sostituzione domina l'effetto output".

Caso 2: input complementari ($\sigma \in [0, 1)$, $\varepsilon_{K,w} < 0$)

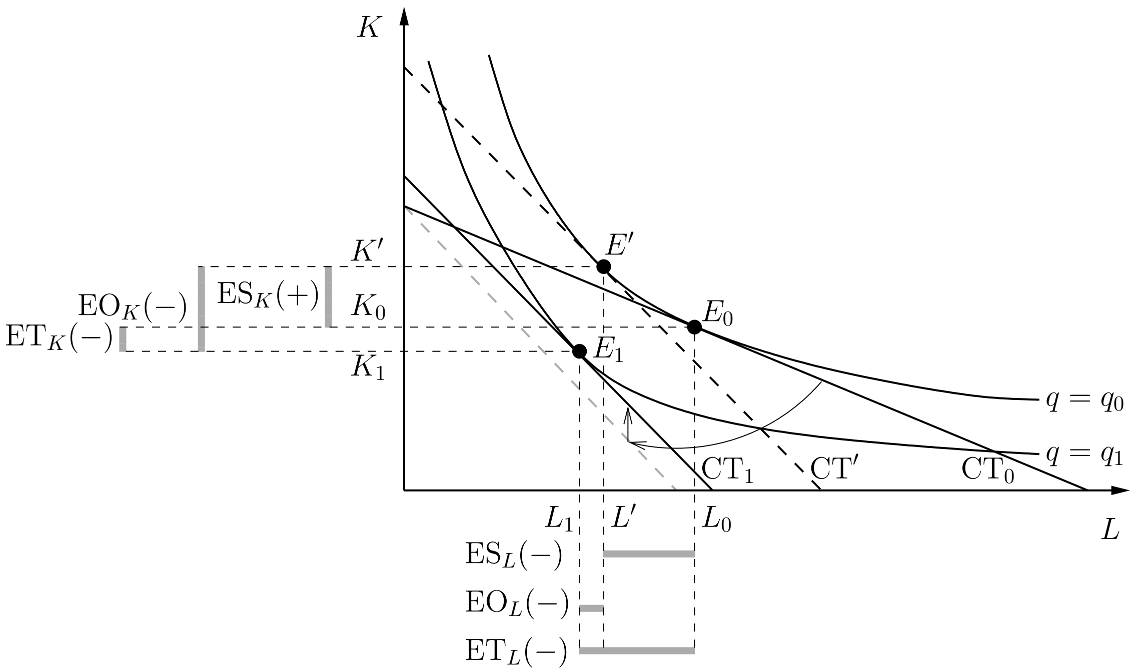


Grafico:

Le dinamiche sono perfettamente identiche al Caso 1, l'unica differenza rilevante sta nel risultato: anche se è il salario ad aumentare ($w \uparrow$), il capitale impiegato all'interno del processo produttivo si riduce, quindi $K \downarrow$.

Effetto	descrizione	input L	input K
Sostituzione **(ES)**	passaggio da E_0 ad E'	-	+
Output **(EO)**	passaggio da E' ad E_1	-	-
Totale **(ET=ES+EO)**	passaggio da E_0 ad E_1	-	-

Per il fattore produttivo K si ha ES > 0 e EO < 0. Poiché ET > 0 allora si dice che "l'effetto output domina l'effetto sostituzione".

- Aumento del costo del capitale: se $r \uparrow$ la curva di isocosto riduce l'intercetta verticale e l'isoquanto di produzione diventa più piatto.

[stesse dinamiche del caso in cui $w \uparrow$; da svolgere a casa]

Offerta aggregata di beni e servizi

Ipotesi:

1. n imprese sul mercato,
2. $M < n$ beni prodotti e venduti sul mercato,
3. tutte le imprese pagano gli stessi salari (w) e gli stessi costi del capitale (r).

In generale l'offerta aggregata relativa all'i-esimo bene/servizio è

$$Q_i^s(p_i, w, r, n_i) = \sum_{j=1}^{n_i} q_j^*(p_i, w, r),$$

dove

- q_j^* è la quantità <u>ottimale</u> offerta dalla singola impresa (j-esima),
- n_i è il numero dei venditori dall'i-esimo prodotto,
- $\sum_{i=1}^{M} n_i = n$.

Supponendo per semplicità che sul mercato concorrenziale le imprese fossero tutte identiche con funzione di offerta lineare di equazione $q^s(p, w, r) = -\dfrac{h(w,r)}{\kappa} + \dfrac{p}{\kappa}$, dove $h(w, r) > 0$ è funzione crescente di w e r, mentre $\kappa > 0$ è un parametro, la **funzione di offerta aggregata** (o offerta di mercato) risulterebbe essere

$$Q^s = nq^s = n\left[-\frac{h(w,r)}{\kappa} + \frac{p}{\kappa}\right] \qquad \Rightarrow \qquad Q^s = Q^s(\underset{(+)}{p}, \underset{(-)}{w}, \underset{(-)}{r}, \underset{(+)}{n}),$$

quindi la sua funzione inversa sarebbe

$$p = h(w,r) + \frac{\kappa}{n}Q^s \qquad \Rightarrow \qquad p = h + kQ^s.$$

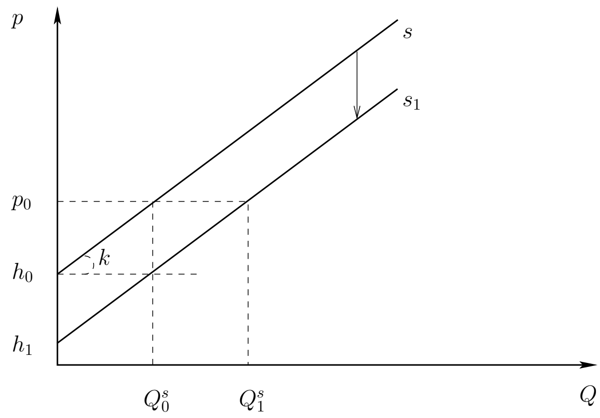
N.B.$\rightarrow$ Si tenga presente che

(a) l'intercetta $h(w, r) > 0$ corrisponde al prezzo relativo al punto di chiusura. Il caso $h(w, r) \leq 0$, benché possibile dal punto di vista metematico, è poco realistico dal punto di vista economico, in quanto l'offerta aggregata di beni e servizi ($Q^s > 0$) si realizza sempre per valori positivi del prezzo.

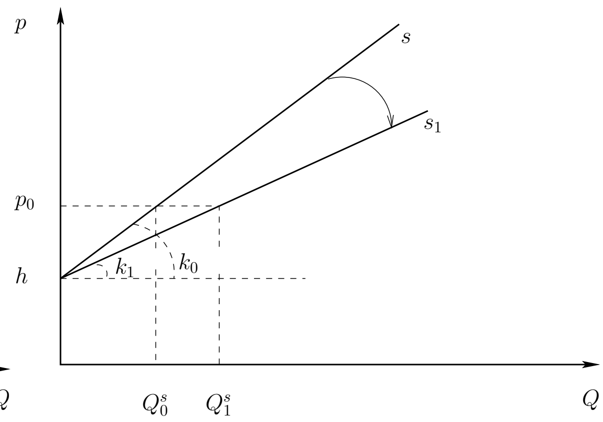
(b) in realtà la funzione di offerta aggregata dovrebbe in un qualche modo dipendere anche dallo stato della tecnologia (T^*). Questa variabile è difficilmente quantificabile (qualitativa), quindi non considerata nella trattazione.

Analisi di statica comparata: variazione costo dei fattori produttivi (w e r), variazione del numero di imprese (n).

riduzione prezzo degli input



aumento del numero delle imprese



In particolare:

- se $w \downarrow$, $r \downarrow$ o $n \uparrow$ si ottiene un'espansione dell'offerta aggregata (si vedano i grafici sopra);
- se $w \uparrow$, $r \uparrow$ o $n \downarrow$ si ottiene una compressione dell'offerta aggregata.

Caso limite: se $n \to \infty$, la funzione di offerta aggregata

1. è "orizzontale" di equazione $p = h$,
2. fissato il livello del prezzo, le imprese riescono a produrre qualsiasi quantità di prodotto,
3. la funzione è perfettamente elastica, infatti risulta

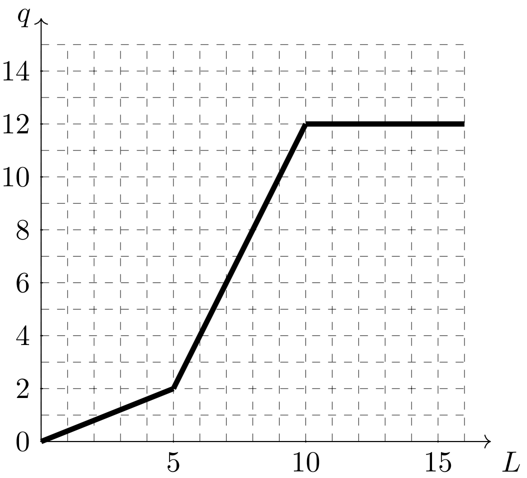
$$\varepsilon_{Q^s,p} = \frac{\frac{\partial Q^s}{Q^s}}{\frac{\partial p}{p}} \to +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial p}{p} = 0.$$

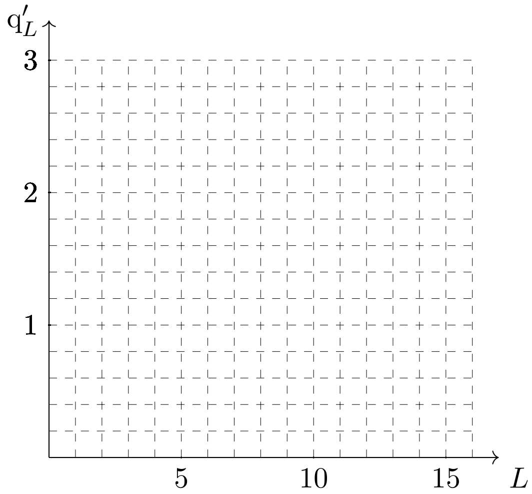
In questo caso particolare la funzione di offerta aggregata è lineare ed isoelastica.

Esercizi 2 - lun 24/03/2025

Rappresentazioni grafiche

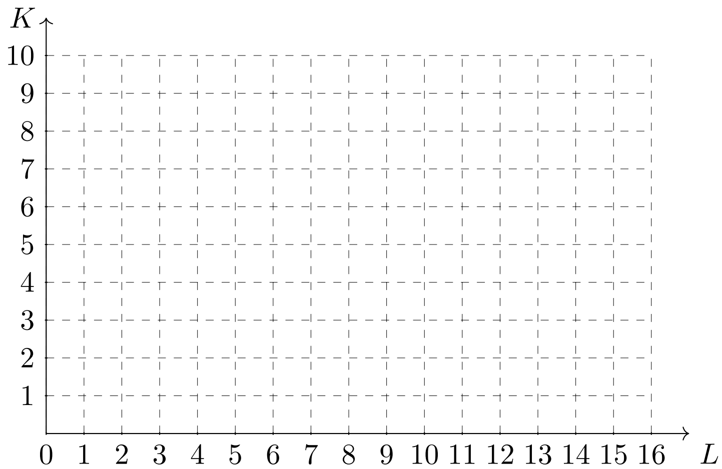
1. **(dall'esame del 18/11/2022)** Data la funzione di produzione nel grafico a sinistra, all'interno del grafico a destra si disegni la funzione della produttività marginale del lavoro.





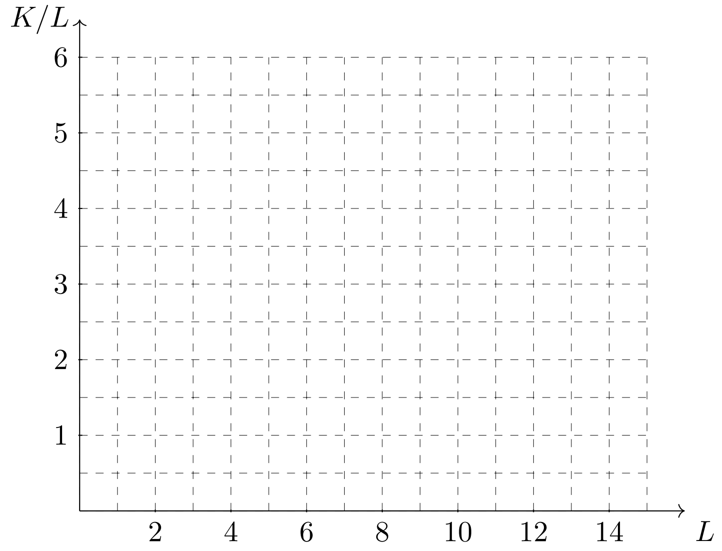
$$\left[q'_L = \begin{cases} 0.4 & \text{per } L \leq 5 \\ 2 & \text{per } 5 < L \leq 10 \\ 0 & \text{per } L \geq 10 \end{cases} \right]$$

2. **(dall'esame dell'08/02/2019)** Data la funzione di produzione $q = 3L + K$, si disegni nel grafico sottostante l'isoquanto di produzione descrivente un livello di output pari a $q = 6$.



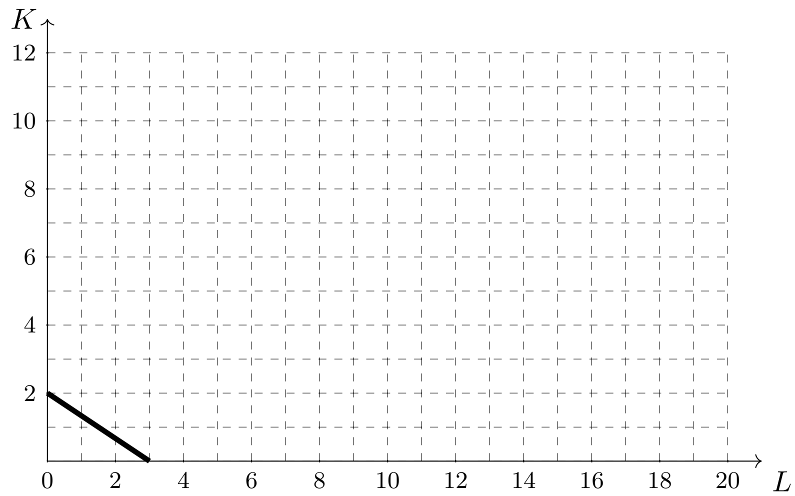
$[K = 6 - 3L]$

3. **(dall'esame del 19/01/2024)** Se la funzione di produzione per due input perfettamente complementari è $q = \min\{4L, K\}$, si rappresenti l'andamento dell'intensità di capitale (rapporto K/L) al variare dell'utilizzo del fattore produttivo lavoro (L).



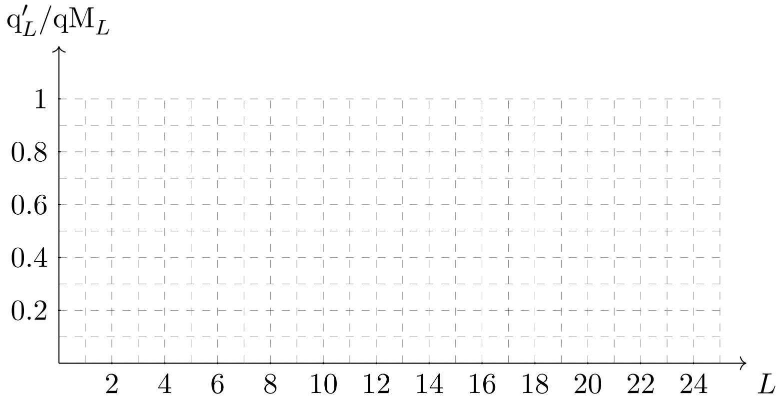
$\left[\frac{K}{L} = 4\right]$

4. **(dall'esame del 12/02/2022)** Nella figura sottostante è rappresenta l'isoquanto di un'impresa che opera con perfetta sostituibilità tra i fattori produttivi lavoro (L) e capitale (K), relativo al livello di produzione $q = 1$. Sapendo che i rendimenti di scala sono costanti, si rappresenti l'isoquanto corrispondente a $q = 5$.



$[K = 10 - 2/3L]$

5. **(dall'esame dell'11/07/2018)** Si supponga che la funzione di produzione di breve periodo sia una Cobb-Douglas di equazione $q = L^{0.8}$; si rappresenti l'andamento del rapporto tra produttività marginale (q'_L) e produttività media (qM_L) del lavoro per $L \in [1, 25]$.



[$q'_L/qM_L = 0.8$]

Funzioni di costo, di ricavo e di profitto

6. **(dall'esame del 15/01/2019)** La funzione di costo totale di una impresa è data da $\text{CT} = q+q^2$. Se l'impresa sostiene un costo medio pari a $\text{CM} = 17$€, a quanto ammonta il suo costo marginale (C')?

[$\text{C}' = 33$€]

7. **(dall'esame del 06/09/2016)** La funzione di costo totale di un'impresa è $\text{CT} = 4q^3-16q^2+50q$. Per quale livello della produzione $q > 0$ accade che la curva dei costi marginali e quella dei costi medi si intersecano?

[$q = 2$]

8. **(dall'esame del 16/01/2017)** La funzione di produzione di un'impresa in concorrenza perfetta è data da $q = \sqrt{L} + \sqrt{K}$, dove L e K sono rispettivamente le quantità utilizzate dei fattori produttivi lavoro e capitale. Sapendo che il prezzo per l'utilizzo del capitale (r) è doppio rispetto a quello dell'utilizzo del fattore lavoro (w), si determini il valore del salario affinché la funzione di costo marginale (lineare) abbia un coefficiente angolare pari a 3.2. **[3 pt]**

[$w = 2.4$€]

9. **(dall'esame dell'11/07/2018)** Si calcoli il valore del costo marginale di un'impresa la cui funzione di produzione è $q = \frac{1}{2}(\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$, sapendo che i fattori produttivi hanno costo pari $w = 24$€ e $r = 8$€.

[$\text{C}' = 12$€]

10. **(dall'esame del 04/09/2012)** Considerate un'impresa che utilizzi una tecnologia descritta dalla funzione di produzione di breve periodo $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$ in cui il fattore lavoro è fisso ($L = 16$). I prezzi dei fattori lavoro e capitale sono pari rispettivamente a $p_L = 0.5$€ e $p_K = 0.5$€. Si determini la funzione di costo totale di breve periodo dell'impresa (CT).

$$\left[\text{CT} = 8 + \frac{Q^2}{128}\right]$$

11. **(dall'esame del 18/01/2016)** La funzione di produzione di breve periodo di un'impresa concorrenziale è $q = K\sqrt{L}$. Il capitale è pari a $K = 2$, mentre il suo prezzo è uguale a $r = 1$€. Il salario è uguale a $w = 16$€. Si determini il costo marginale dell'impresa in funzione delle quantità prodotte.

[$\mathrm{C}'(q) = 8q$]

12. **(dall'esame dell'08/07/2020)** Nel mese di Febbraio, un'impresa con funzione di produzione $q = L^{0.2}K^{0.3}$ produce 4 unità e sostiene un costo totale pari a CT = 72€. Nel mese di Marzo, l'impresa quadruplica l'utilizzo dei due fattori produttivi lavoro (L) e capitale (K). Assumendo che il prezzo unitario dei fattori produttivi non vari, si calcoli la differenza di costo medio tra Marzo e Febbraio. (*si indichi il segno*)

[ΔCM = 18]

13. **(dall'esame del 15/01/2018)** Date le informazioni contenute nella tabella seguente, sapendo che il costo medio è costante e pari a CM = 12€, si completi la tabella e si calcoli il profitto (Π_{max}) che l'impresa ottiene fissando il prezzo in modo ottimale.

prezzo	**quantità**	**ricavo totale**	**costo totale**
13€	17		
14€	15		
15€	14		
16€	13		
17€	10		
18€	8		

[Π_{max} = 52€]

14. **(dall'esame del 30/05/2017)** La tabella seguente riporta la produzione ottenuta da un'impresa che utilizza i fattori produttivi lavoro (L) e capitale (K).

L \ K	1	2	3
1	10	14	18
2	14	20	25
3	18	25	30

L'impresa deve produrre la quantità $q = 18$. Dati il costo unitario di utilizzo del lavoro $w = 1$€ e del capitale $r = 4$€, si calcoli il costo totale (CT) sostenuto dall'impresa.

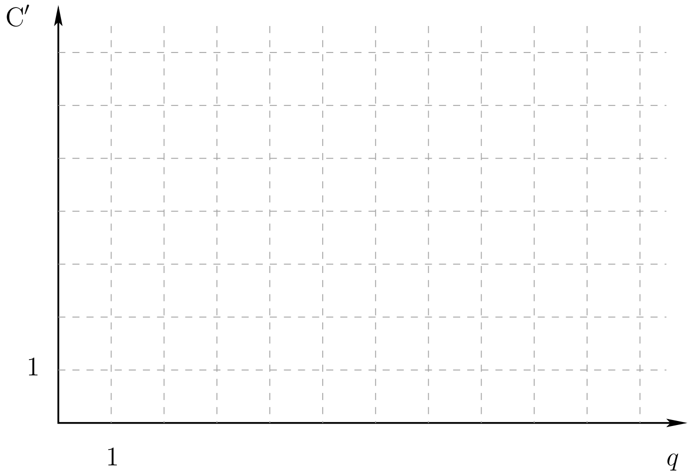
[CT = 7€]

15. **(dall'esame del 25/06/2019)** Date le informazioni contenute nella tabella sottostante, si calcoli il costo marginale relativo ai livelli di produzione indicati. Si scriva il livello di produzione $\tilde{q}$ che rende minimo il costo marginale.

quantità	costo medio	costo marginale
$q = 3$	CM(3) = 33	-
$q = 4$	CM(4) = 32	$\mathrm{C}'(4) =$ ________
$q = 5$	CM(5) = 31	$\mathrm{C}'(5) =$ ________
$q = 6$	CM(6) = 32	$\mathrm{C}'(6) =$ ________
$q = 7$	CM(7) = 33	$\mathrm{C}'(7) =$ ________

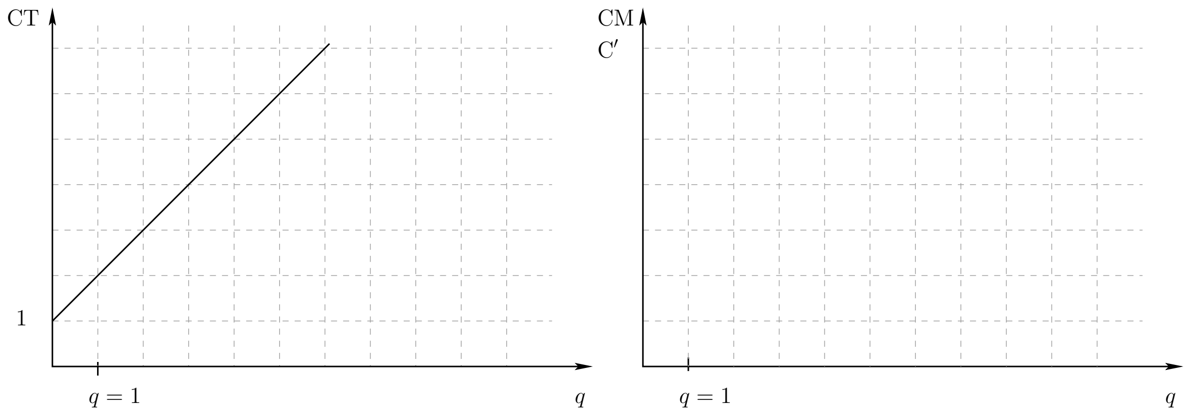
[$\tilde{q} = 5;\ \mathrm{C}' = 29, 27, 37, 39$]

16. **(dall'esame del 16/01/2017)** Sapendo che un'impresa ha costi fissi pari a CF = 10000€ e costi variabili pari a 2 volte la quantità di output prodotta (q), si disegni la curva relativa alla funzione dei costi marginali (C′), indicandone il valore dell'intercetta.



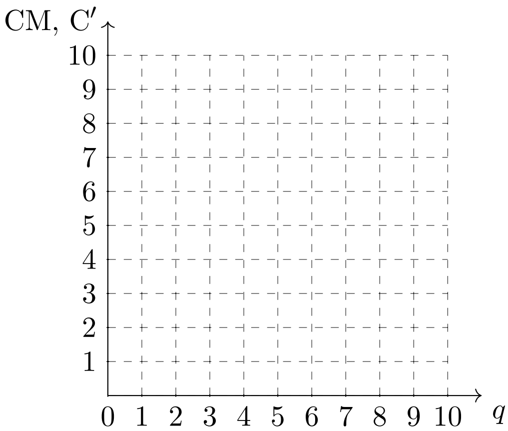
[valore dell'intercetta = 2]

17. **(dall'esame del 11/11/2016)** Data la funzione di costo totale rappresentata nel grafico di sinistra, all'interno dell'altro grafico si disegnino le curve di costo medio (CM) e di costo marginale (C′), indicando con precisione il costo medio corrispondente ad 1 unità prodotta.



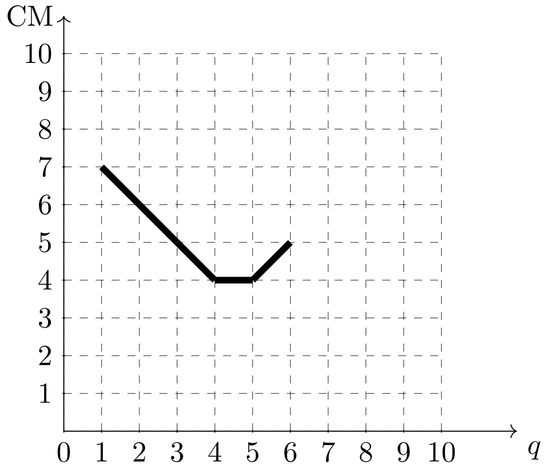
[CM(1) = 2€]

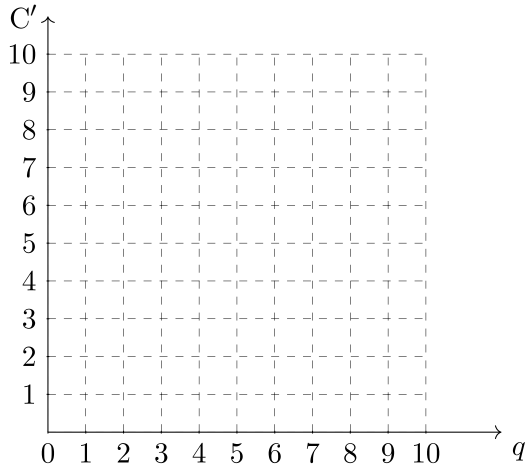
18. **(dall'esame del 16/09/2019)** Data la funzione di costo totale di un'impresa $\text{CT} = 0.25q^2$, si disegni con precisione nel grafico sottostante le funzioni di costo medio (CM) e di costo marginale (C′) per $1 \leq q \leq 10$.



[$\text{CM} = 0.25q,\ \text{C}' = 0.5q$]

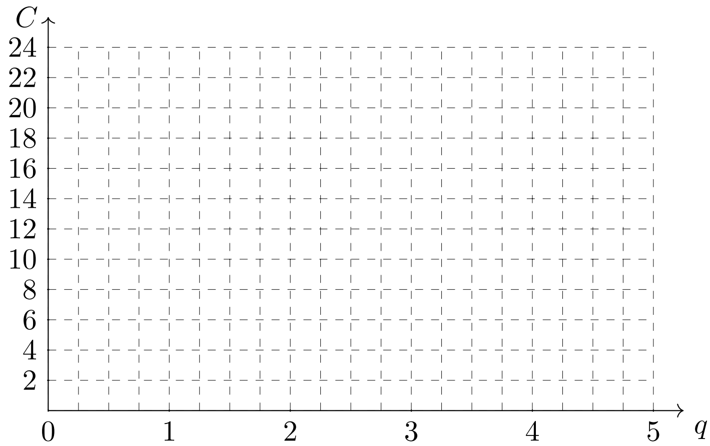
19. **(dall'esame del 30/05/2017)** Un'impresa produce il bene q, che ha la caratteristica di essere non divisibile poiché si possono produrre solo quantità intere. Il grafico di sinistra rappresenta la funzione di costo per unità di prodotto, cioè il costo medio. Nel grafico di destra si rappresenti il costo dell'ultima unità prodotta, equivalente al costo marginale $\mathrm{C}' = \Delta\mathrm{CT}/\Delta q$ per $q \in [2, 6]$. (**Suggerimento:** la variazione della quantità è sempre $\Delta q = 1$.)





[I punti sono: $(2, 5), (3, 3), (4, 1), (5, 4), (6, 10)$]

20. **(dall'esame del 21/06/2022)** Un'impresa che opera in concorrenza perfetta ha funzione di costo medio totale $\mathrm{CMT} = q^2 - 6q + 15$ e vende il proprio prodotto al prezzo $p^* = 6$€. Nel grafico sottostante si disegnino le funzioni di costo medio totale, di costo marginale e del prezzo. Si identifichi inoltre la produzione ottimale per l'impresa. **[3 pt]**



[$q^* = 3,\ p^* = 6,$ minimi: $\mathrm{CMT}\colon (3, 6),\ \mathrm{C}'\colon (2, 3)$]

21 Aggregazione [2] - mar 25/03/2025

Elasticità dell'offerta al prezzo

La formula per il calcolo dell'elasticità dell'offerta al prezzo è del tutto analoga a quella dell'elasticità della domanda. L'unica differenza rilevante è che in questo caso $\varepsilon_{q^s,p} \geq 0$ per definizione poiché la curva di offerta generalmente è non decrescente.

Casi estremi:

(a) **curva di offerta perfettamente rigida:** retta verticale ($\varepsilon_{q^s,p} = 0$),

(b) **curva di offerta perfettamente elastica:** retta orizzontale ($\varepsilon_{q^s,p} \to +\infty$).

Di norma il valore di $\varepsilon_{q^s,p}$ varia lungo la curva di offerta. In particolare, per le funzioni (inverse) di offerta lineari $s : p = h + kq^s$, si guarda al valore dell'intercetta (h), infatti

$$q^s = \frac{p-h}{k}$$

quindi

$$\varepsilon_{q^s,p} = \frac{\partial q^s}{\partial p}\frac{p}{q^s} = \frac{1}{\cancel{k}}\frac{p}{\frac{p-h}{\cancel{k}}} = \frac{p}{p-h},$$

dove il denominatore è $p - h > 0$ per definizione. Si hanno perciò i seguenti scenari:

- se $h > 0 \Rightarrow \varepsilon_{Q^s,p} > 1$,
- se $h = 0 \Rightarrow \varepsilon_{Q^s,p} = 1$,
- se $h < 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon_{Q^s,p} < 1$.

N.B.$\rightarrow$ Si tenga presente che il caso con intercetta positiva è quello più realistico rispetto agli altri due. Nel caso la funzione inversa di offerta sia lineare con intercetta non positiva, dal punto di vista economico si deve considerare come funzione di offerta la semiretta partente da un punto di chiusura con coordinate entrambe positive.

Da questi risultati emerge che, se la funzione di offerta ha equazione data da una retta passante per l'origine (intercetta nulla), questa funzione è **isoelastica** di elasticità $\varepsilon_{Q^s,p} = 1$. Questa proprietà è valida per qualsiasi valore di pendenza (o coefficiente angolare) $k \geq 0$.

N.B.$\rightarrow$ Se la funzione della curva di offerta non è lineare, si fa questo ragionamento con la retta tangente nel punto in cui si vuole calcolare l'elasticità.

Domanda aggregata di lavoro

Ipotesi:

1. n imprese sul mercato,
2. le imprese vendono diversi prodotti, quindi ciascuna di loro applica il proprio prezzo (p_i),
3. tutte le imprese pagano gli stessi salari (w) e gli stessi costi del capitale (r),
4. la funzione inversa di domanda di lavoro per la singola impresa (i-esima) è data dalla domanda <u>non</u> condizionale $L_i^* : w = p_i \mathrm{q}'_L$,

In generale la domanda aggregata di lavoro relativa all'i-esima impresa è

$$L^d(p_1, p_2, \ldots, p_n, w, r, n) = \sum_{i=1}^{n} L_i^*(p_i, w, r).$$

Per semplicità, si supponga che sul mercato concorrenziale le imprese siano tutte identiche con funzione di domanda di lavoro lineare di equazione $\bar{L}^*(w, r, \bar{p}) = \dfrac{a(r,\bar{p})}{\beta} - \dfrac{w}{\beta}$, dove

- $\bar{L}^*$ indica un valore medio di domanda di lavoro proveniente da ciascuna delle n imprese,
- $a(r,\bar{p}) > 0$ è funzione crescente di r e $\bar{p}$,
- $\bar{p}$ indica un valore medio di prezzo applicato da ciascuna delle n imprese ($c.d$ livello generale dei prezzi),
- $\beta > 0$ è un parametro.

Sotto queste condizioni, la **funzione di domanda aggregata di lavoro** (o domanda di mercato di lavoro) risulterebbe essere

$$L^d = n\bar{L}^* = n\left[\frac{a(r,\bar{p})}{\beta} - \frac{w}{\beta}\right] \qquad \Rightarrow \qquad L^d = L^d(\underset{(-)}{w}, \underset{(\pm)}{r}, \underset{(+)}{\bar{p}}, \underset{(+)}{n}),$$

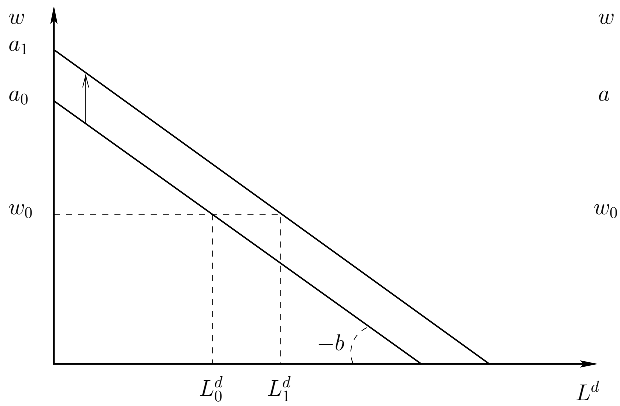
quindi la funzione inversa è

$$w = a(r,\bar{p}) - \frac{\beta}{n}L^d \qquad \Rightarrow \qquad w = a - bL^d$$

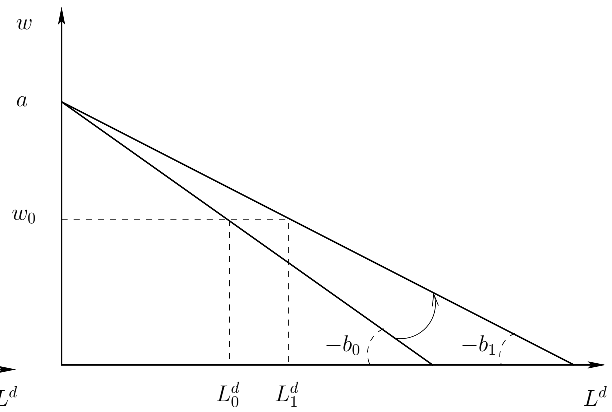
N.B.$\rightarrow$ Si tenga presente che la funzione $a(r,\bar{p})$ è sicuramente crescente rispetto al prezzo medio di vendita ($\bar{p}$), ma è crescente rispetto al costo del capitale solo se gli input L e K sono **sostituti**. Nel caso di input **complementari**, la funzione $a(r,\bar{p})$ è decrescente rispetto a r.

Analisi di statica comparata: variazione del prezzo medio ($\bar{p}$) e del costo del capitale (r), variazione del numero di imprese (n).

aumento del prezzo/costo del capitale (sostituti)
o diminuzione del costo del capitale (complementare)



aumento del numero delle imprese



In particolare:

- se $r \uparrow$ (input sostituti)/$r \downarrow$ (input complementari), $\bar{p} \uparrow$ o $n \uparrow$ si ottiene un'espansione della domanda aggregata di lavoro (si vedano i grafici sopra);
- se $r \downarrow$ (input sostituti)/$r \uparrow$ (input complementari), $\bar{p} \downarrow$ o $n \downarrow$ si ottiene una compressione della domanda aggregata di lavoro.

Caso limite: se $n \to \infty$, la funzione di domanda aggregata di lavoro

1. è "orizzontale" di equazione $w = a$,

2. fissato il livello del salario, le imprese possono domandare qualsiasi quantità di lavoro,

3. la funzione è perfettamente elastica, infatti risulta

$$\varepsilon_{L^d,w} = \frac{\frac{\partial L^d}{L^d}}{\frac{\partial w}{w}} \to +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial w}{w} = 0.$$

In questo caso particolare la funzione di domanda aggregata di lavoro è lineare ed isoelastica.

Domanda aggregata di capitale

Tutto il procedimento è pressoché identico alla definizione della domanda aggregata di lavoro, quindi alla fine risulta

$$K^d = n\bar{K}^* = n\left[\frac{a(\bar{p},w)}{\beta} - \frac{r}{\beta}\right] \qquad \Rightarrow \qquad K^d = K^d(\underset{(-)}{r}, \underset{(\pm)}{w}, \underset{(+)}{\bar{p}}, \underset{(+)}{n}),$$

quindi la funzione inversa è

$$r = a(\bar{p},w) - \frac{\beta}{n}K^d \qquad \Rightarrow \qquad r = a - bK^d$$

Esercizi 3 - mar 25/04/2025

- Cos'è un foglio elettronico?
- Istruzioni e definizioni base (file *Spreadsheet.pdf*),
- **simulazione** su foglio elettronico del concetto di derivata e di rapporto incrementale. (file *Derivate.xls*),
- **simulazione** su foglio elettronico sulle variazioni (file *Variazioni.xls*).
- **simulazione** tramite foglio elettronico sulle 3 formule di elasticità. (file *Elasticità.xls*),
- **simulazione** tramite foglio elettronico delle principali funzioni in matematica (file *Funzioni_pratico.xls*),
- **simulazione** tramite foglio elettronico sulle funzioni di costo (file *Costi.xls*).

N.B.→ Tutti i file in parentesi sono reperibili nell'area e-learning del corso.

22 Teoria del Consumatore - mer 26/03/2025

La Teoria del Consumatore si pone l'obiettivo di studiare il comportamento degli agenti ed i motivi che li spingono verso determinate scelte di consumo. In pratica, cerca di spiegare la relazione inversa che generalmente sussiste tra i movimenti nei prezzi dei beni e/o servizi e la loro domanda (legge generale della domanda); questa teoria analizza anche i casi ≪anomali≫ (**Beni di Giffen/Veblen**). Al centro della Teoria del Consumatore è quindi posto l'individuo

$$\text{Individuo} \begin{array}{l} \nearrow \ \text{domanda beni e servizi} \\ \\ \searrow \ \text{offre lavoro e capitale (risparmio).} \end{array}$$

Scelte dell'individuo:

(a) se e quanto lavorare, quindi quanto **reddito da lavoro** (wL) ottenere. Il **reddito totale** o **effettivo** (Y_{tot}) ammonta a

$$\begin{aligned} Y_{\text{tot}} &= wh + V \\ &= w(T - \ell) + V \\ &= wT - w\ell + V, \end{aligned}$$

dove

- w è il salario,
- V è un (eventuale) **reddito non derivante dall'attività lavorativa**
- $h = T - \ell$ è il numero delle ore-lavoro dell'individuo,
- T è tempo totale a disposizione dell'individuo,
- ℓ è tempo libero (*leisure*),
- il prodotto wT indica il **reddito potenziale**, cioè il reddito che l'individuo otterrebbe se decidesse di non usufruire di tempo libero.

(b) quanto utilizzare del proprio reddito totale al fine di

- risparmiare e/o investire,
- prendere a prestito delle somme di denaro (indebitarsi).

In ogni periodo l'individuo dispone perciò di un **reddito effettivo** Y_t, con $t = 1, 2, \ldots$;

(c) decidere l'ammontare di **reddito disponibile** (Y) da destinare all'acquisto di beni e servizi.

N.B.→ Per motivi dettati esclusivamente da ragioni didattiche, la Teoria del Consumatore sarà illustrata seguendo un differente ordine rispetto ai punti (a), (b) e (c) di cui sopra; si partirà pertanto dalla **ripartizione del reddito disponibile** per l'acquisto di due beni/servizi x_1 e x_2 per poi passare **ripartizione del reddito totale** nelle scelte tra consumo C e tempo libero ℓ ed infine concludere con la **ripartizione del reddito effettivo** nelle scelte intertemporali di consumo C_1 e C_2.

Ipotesi di base:

1. il consumatore si comporta in maniera razionale, quindi acquista beni e/o servizi con lo scopo di massimizzare la propria utilità che generalmente si identifica nel concetto soggettivo della soddisfazione personale,
2. il consumatore vive, quindi consuma, per T periodi,
3. in ciascun periodo il consumatore può scegliere tra $M + 1$ beni e/o servizi $x_1, x_2, \ldots, x_M, \ell$,

4. il bene i-esimo x_i ha prezzo p_i, con $i = 1, 2, \ldots, M$,
5. il consumatore dispone di un reddito o somma di denaro Y,
6. il consumatore può scegliere un qualsiasi **paniere** (vettore di beni e/o servizi) dato da

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} P^1 & P^2 \ldots P^T \end{bmatrix} \\ &= [x_1^1\ x_2^1\ \ldots\ x_M^1\ \ell^1 \quad x_1^2\ x_2^2\ \ldots\ x_M^2\ \ell^2 \quad \ldots \quad x_1^T\ x_2^T\ \ldots\ x_M^T\ \ell^T] \end{aligned}$$

che contiene in tutto $T(M+1)$ elementi. In ogni periodo di vita, tale paniere deve soddisfare la relazione

$$\sum_{i=1}^{M} p_i x_i^t + w\ell^t \leq Y^t,$$

dove w è il salario.

1. Gli assiomi e le preferenze

È banale, ma l'individuo posto dinanzi ad una scelta si dirigerà sempre verso ciò che preferisce, quindi la Teoria del Consumatore è basata sui seguenti assiomi (o postulati):

(a) completezza: il consumatore è sempre in grado di effettuare una scelta. Presi due panieri $P(x_1, x_2, \ldots, x_M, \ell)$ e $P^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_M^*, \ell^*)$

- il consumatore preferisce P se $(x_1, x_2, \ldots, x_M, \ell) \succ (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_M^*, \ell^*)$
- il consumatore preferisce P^* se $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_M^*, \ell^*) \succ (x_1, x_2, \ldots, x_M, \ell)$
- il consumatore non ha preferenze se $(x_1, x_2, \ldots, x_M, \ell) \sim (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_M^*, \ell^*)$, quindi i panieri risultano essere **indifferenti**.

(b) transitività: le scelte del consumatore devono sempre essere coerenti. Presi tre panieri $P(x_1, x_2, \ldots, x_M, \ell)$, $P^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_M^*, \ell^*)$ e $P^o(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_M^o, \ell^o)$

$$\text{se } P \succ P^* \text{ e } P^* \succ P^o, \text{ allora risulta } P \succ P^o.$$

(c) non sazietà (o monotonìa): il consumatore preferisce sempre l'abbondanza alla carenza. Presi due panieri $P^t(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_M^t, \ell^t)$ e $P^*(x_1^{*t}, x_2^{*t}, \ldots, x_M^{*t}, \ell^{*t})$

$$P^t \succ P^{*t} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i^t \geq x_i^{*t} \\ \ell^t \geq \ell^{*t} \end{cases} \qquad \text{per } \forall i = 1, 2, \ldots, M \text{ e } \forall t = 1, 2, \ldots, T.$$

Questo assioma può essere sintetizzato con l'espressione «più si consuma, più si sta meglio».

23 Teoria del Consumatore [2] - gio 27/03/2025

ATTENZIONE! Gli strumenti analitici relativi alla Teoria del Consumatore sono esattamente gli stessi utilizzati nell'ambito della teoria dell'Impresa (rivedere nel dettaglio le pagg. 18-36).

2. La funzione di utilità

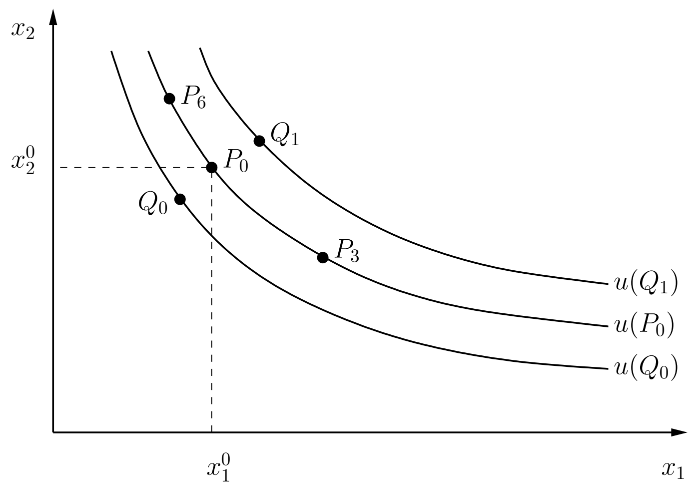
Come può essere quantificata la soddisfazione personale del consumatore?
La **Funzione di utilità**

$$U = u(x_1, x_2, \dots, x_M, \ell)$$

identifica il livello di soddisfazione del consumatore; il valore numerico che questa funzione ritorna permette di ordinare le scelte del consumatore stesso in maniera inequivocabile, infatti:

- $P \succ P^*$ quando $u(x_1, x_2, \dots, x_M, \ell) > u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_M, \ell^*)$,
- $P^* \succ P$ quando $u(x_1, x_2, \dots, x_M, \ell) < u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_M, \ell^*)$,
- $P \sim P^*$ quando $u(x_1, x_2, \dots, x_M, \ell) = u(x_1^*, x_2^*, \dots, x_M, \ell^*)$.

Imponendo la condizione semplificatrice $M = 2$ ed escludendo il tempo libero dalla notazione (due ipotesi semplificatrici che non determinano perdite di generalità), la funzione di utilità è rappresentabile graficamente attraverso le **curve di indifferenza** all'interno di uno schema Cartesiano nel quale x_1 è in ascissa e x_2 è in ordinata. L'andamento grafico e le proprietà sono le stesse viste per gli isoquanti di produzione (si veda pag. 25).



Proprietà:

- la curva di indifferenza deve essere continua;
- **utilità marginale** rispetto al bene i-esimo

$$\mathrm{u}'_{x_i} = \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_M)}{\partial x_i} \geq 0,$$

  con $i = 1, 2, \dots, M$. Questa condizione stabilisce che un aumento del consumo di un bene porta necessariamente ad una non diminuzione dell'utilità del consumatore;
- lungo ciascuna curva di indifferenza sono situati tutti i panieri indifferenti (generano la stessa utilità per il consumatore), quindi deve essere **non crescente**. Una curva di indifferenza crescente violerebbe l'assioma di non sazietà;

- poiché ciascun consumatore ha **gusti diversi**, ognuno ha una propria mappa delle curve di indifferenza: dal punto di vista geometrico questo aspetto è evidenziato dalla pendenza e dalla curvatura;
- tutti i panieri sono punti del piano ed appartengono ad una curva di indifferenza, ma non tutti appartengono alla stessa;
- la curva di indifferenza più lontana dall'origine è quella associata al livello di utilità più alto: considerando due curve di indifferenza diverse e fissata la quantità di un bene, la curva situata più lontano dall'origine modtra una quantità sicuramente maggiore dell'altro bene, quindi genera un'utilità maggiore;
- le curve di indifferenza non possono intersecarsi

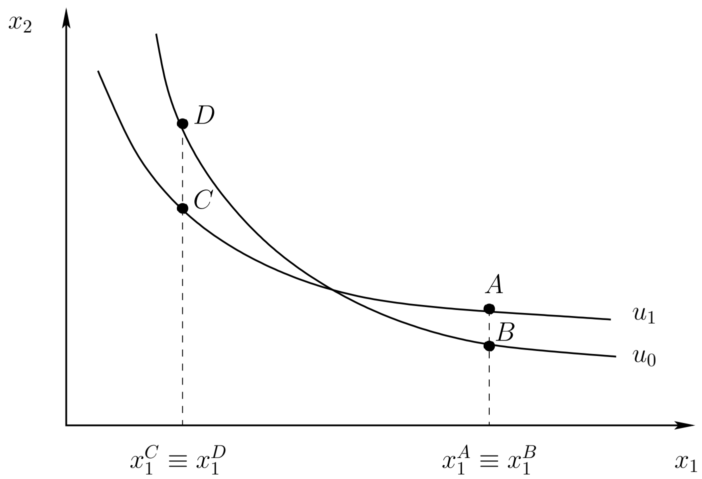


Grafico:

Poiché $A \succ B$ ($x_1^A \equiv x_1^B$, ma $x_2^A > x_2^B$) e $A \sim C$ (A e C appartengono alla stessa curva di utilità/indifferenza), allora dovrebbe risultare che $C \succ B$ per l'assioma di transitività. Per lo stesso discorso dovrebbe valere $D \succ A$ perché $D \succ C$ e $C \sim A$. In realtà si ottiene la relazione logica

$$D \succ C \sim A \succ B \sim D.$$

Questa gerarchia vìola palesemente l'assioma di transitività, quindi impedisce di fatto l'intersezione tra due diverse curve di indifferenza.

- le curve di indifferenza sono **convesse** poiché il consumatore preferisce la varietà dei beni alla scarsità, cioè un paniere dato dalla combinazione di due panieri iniziali deve generare un'utilità maggiore.

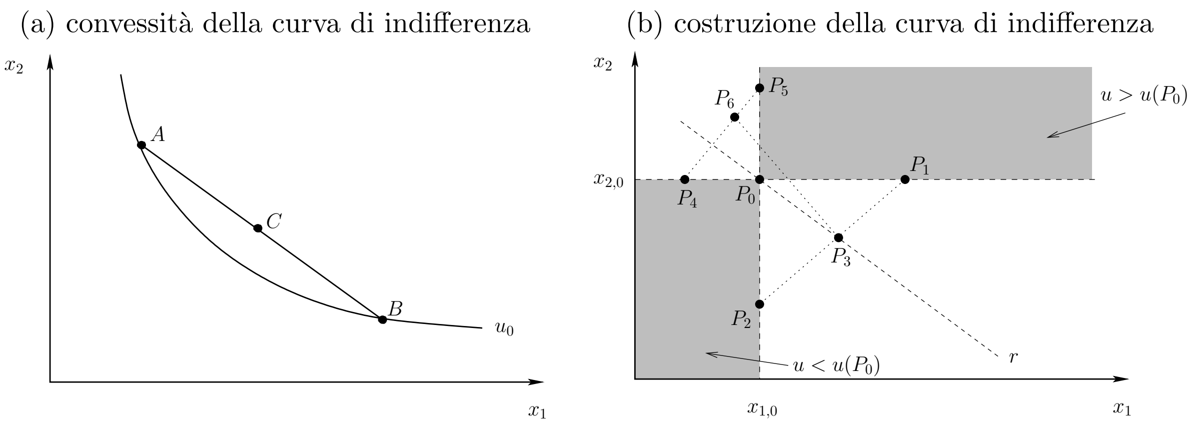


Grafico:

Grafico (a): poiché $A \sim B$, allora il paniere C, posizionato lungo il segmento $\overline{AB}$, giace lungo una curva di indifferenza più alta rispetto a u_0. In formule, deve risultare

$$C \succ \alpha A + (1-\alpha)B$$

dove $\alpha \in [0,1]$.

Grafico (b): del tutto simile al grafico di pag. 25, con la sola differenza che il paniere P_6 deve trovarsi al di sopra della retta tratteggiata (r) che congiunge i panieri P_0 e P_3 perché, data la relazione $P_0 \sim P_3 \sim P_6$, qualsiasi combinazione degli estremi P_3 e P_6 rappresentata dal segmento $\overline{P_3P_6}$ deve essere preferita al paniere P_0.

Funzione di utilità $\nearrow$ Cobb-Douglas (si veda pag. 38): $u(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$

Funzione di utilità $\searrow$ CES (si veda pag. 39): $u(x_1, x_2) = A[\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}]^{s/\rho}$

3. Il vincolo di bilancio

In termini generali il vincolo di bilancio consiste nella dotazione iniziale di tutti i beni e servizi in possesso del consumatore, quindi

$$Y = \sum_{i=1}^{M} p_i x_i.$$

Poiché per ipotesi $n = 2$ l'equazione di cui sopra si riduce a

$$Y = p_1x_1 + p_2x_2,$$

dove il reddito disponibile Y ed i prezzi p_1 e p_2 sono variabili esogene, cioè indipendenti dalle scelte di consumo, mentre le quantità domandate x_1 ed x_2 sono le variabili sulle quali i consumatori esercitano le loro scelte. Esplicitando la funzione vincolo di bilancio si ottiene l'equazione della retta

$$x_2 = \frac{Y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

che risulta essere decrescente e con intercetta positiva.

4. Saggio Marginale di Sostituzione (SMS)

Lungo la singola curva di indifferenza l'utilità per il consumatore è costante per definizione. Se, a parità di utilità, il consumatore decide di cambiare la conformazione del proprio paniere, egli si muove lungo la stessa curva di indifferenza.
Se aumenta (diminuisce) la domanda del bene x_1, di quanto deve diminuire (aumentare) il consumo di x_2 affinché l'utilità resti inalterata?

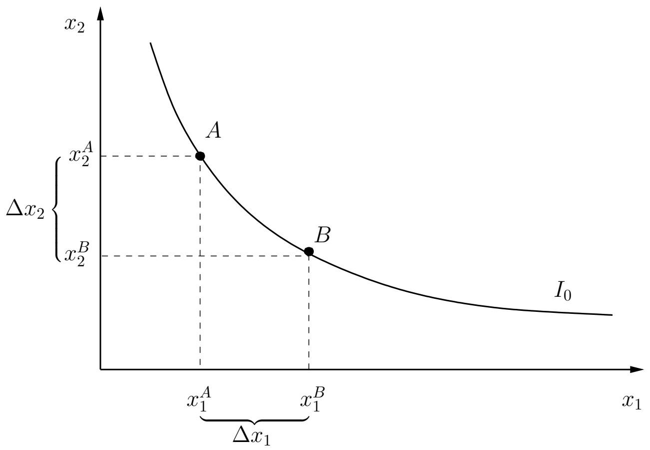


Grafico:

Nel passaggio dal paniere A al paniere B, muta il paniere scelto dal consumatore all'interno della stessa curva di indifferenza: variano perciò le quantità consumate dei beni x_1 e x_2, mentre l'utilità resta la stessa.

SMS: grado di sostituibilità dei beni al fine di conseguire lo stesso livello di utilità, indica la massima quantità di x_2 che il consumatore è disposto a cedere per consumare un'unità aggiuntiva di x_1. Il SMS(x_1, x_2) si ottiene attraverso il calcolo del seguente differenziale

$$du(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} d\,x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} d\,x_2$$

Poiché ci si muove lungo la stessa curva di utilità/indifferenza, la variazione dellìutilità del consumatore è nulla ($d\,u(x_1, x_2) = 0$), quindi

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} d\,x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} d\,x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{u}'_{x_1} d\,x_1 + \mathrm{u}'_{x_2} d\,x_2 = 0,$$

dove u'_{x_1} e u'_{x_2} indicano rispettivamente le **funzioni di utilità marginale** del bene 1 e del bene 2. Il SMS(x_1, x_2) è dato perciò dalle seguenti espressioni equivalenti

$$\mathrm{SMS}(x_1, x_2) = \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = -\frac{\mathrm{u}'_{x_1}}{\mathrm{u}'_{x_2}}.$$

Nella Teoria del Consumatore vale la **Legge dell'Utilità Marginale Decrescente**, identificata dal segno negativo delle derivate seconde

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$$

oppure semplicemente racchiusa dalle formule

$$\lim_{x_1 \to \infty} u(x_1, \bar{x}_2) = u_{\max} \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x_2 \to \infty} u(\bar{x}_1, x_2) = u_{\max}.$$

Tale legge afferma che, una volta fissato il consumo di un bene, consumare elevate quantità dell'altro bene non conduce verso sostanziali miglioramenti nell'utilità del consumatore.

In pratica, il SMS(x_1, x_2) si identifica nella derivata

$$\mathrm{SMS}(x_1, x_2) = \frac{d\,x_2}{d\,x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1},$$

quindi risulta

$$\mathrm{SMS}(x_1, x_2) \begin{array}{l} \nearrow \ \text{rapporto delle utilità marginali dei due beni} \\[1em] \searrow \ \text{pendenza della curva di utilità} \end{array}$$

N.B.$\rightarrow$ Si noti che dal punto di vista strettamente analitico, definizioni e proprietà del saggio marginale di sostituzione sono esattamente le stesse del saggio marginale di sostituzione tecnica introdotto a pag. 28.

5. Equilibrio del consumatore

Generalmente l'equilibrio del consumatore si ottiene in corrispondenza del paniere $E(x_1^*, x_2^*)$ in corrispondenza del quale la retta vincolo di bilancio è tangente alla curva di indifferenza più alta.

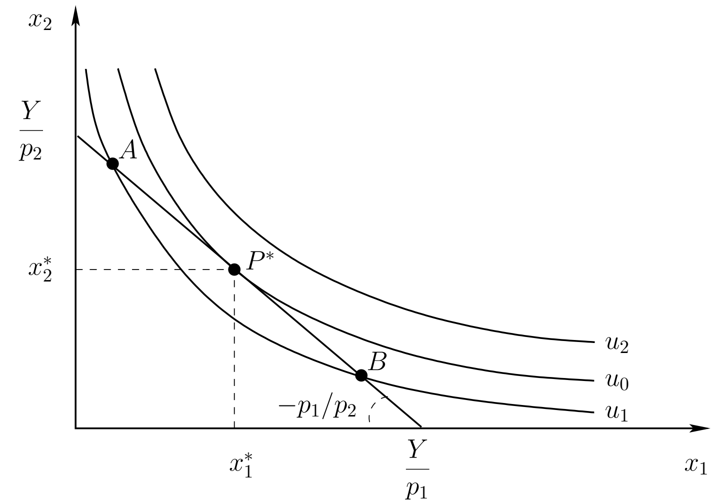


Grafico:

I panieri A, B ed P^* si trovano tutti sulla retta vincolo di bilancio, in corrispondenza della quale il consumatore spende per intero il proprio reddito disponibile Y; poiché $A \sim B$ (i panieri A e B giaciono lungo la curva di utilità/indifferenza u_2), risulta anche $P^* \succ A$ e $E \succ B$ poiché giace lungo la curva di indifferenza u_0. Il punto P^* rappresenta il paniere di equilibrio perché:

- i panieri lungo la curva u_0, quindi indifferenti ad P^* sono inaccessibili al consumatore (reddito Y non sufficiente al loro acquisto);
- i panieri appartenenti alla curva di utilità/indifferenza u_1 sono panieri inaccessibili al consumatore (reddito Y non sufficiente al loro acquisto).

Equilibrio del consumatore:

$$\begin{cases} |\text{SMS}(x_1, x_2) = \dfrac{p_1}{p_2} \\ Y = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} |\text{SMS}(x_1, x_2) = \dfrac{p_1}{p_2} \\ U = u(x_1, x_2) \end{cases}$$

dove U indica un dato livello di utilità per il consumatoe. La soluzione del sistema è data dalle funzioni di domanda dei beni x_1 ed x_2

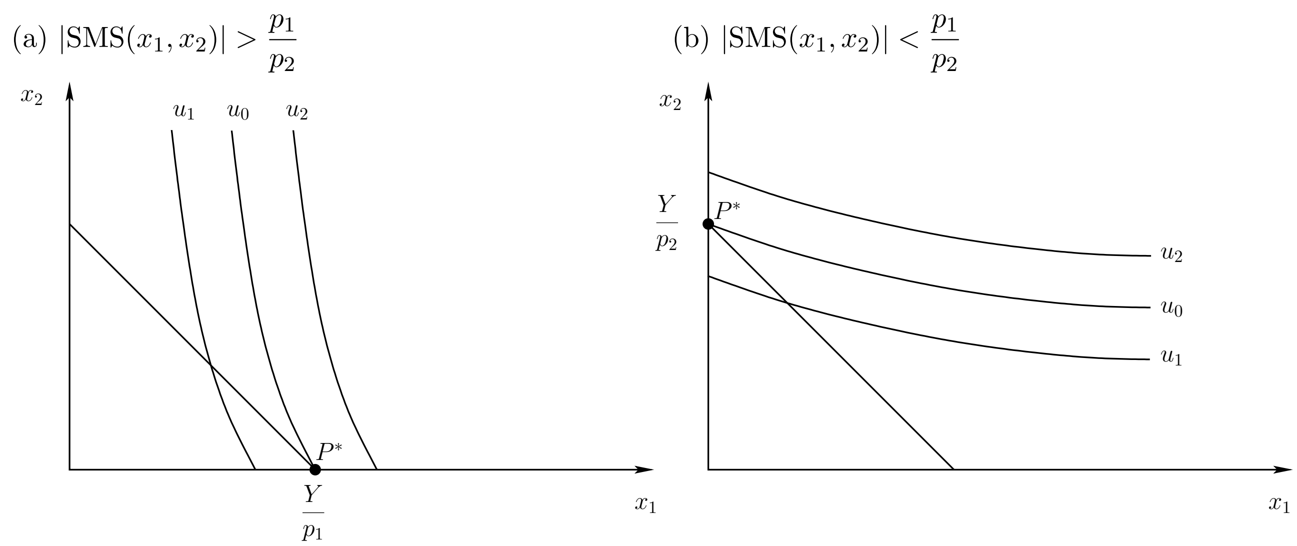
$$\begin{cases} x_1^* = x_1(p_1, p_2, Y) \\ x_2^* = x_2(p_2, p_1, Y) \end{cases}$$

dove i prezzi p_1 e p_2, il reddito disponibile dei consumatori Y sono le variabili esogene.

N.B.→ Si tenga presente che in realtà la funzione di domanda dovrebbe in un qualche modo dipendere anche dal gusto dei consumatori (g). Tuttavia, questa variabile è difficilmente quantificabile (qualitativa), quindi non considerata nella trattazione.

Soluzioni d'angolo: casi particolari di equilibrio del consumatore:

- se $|\text{SMS}(x_1, x_2)| > \dfrac{p_1}{p_2} \Rightarrow$ la curva di utilità/indifferenza ha sempre pendenza maggiore rispetto al vincolo di bilancio, quindi il consumatore si collocherà in corrispondenza del paniere $X_1(Y/p_1, 0)$ (consumo del solo bene x_1),
- se $|\text{SMS}(x_1, x_2)| < \dfrac{p_1}{p_2} \Rightarrow$ la curva di utilità/indifferenza ha sempre pendenza minore rispetto al vincolo di bilancio, quindi il consumatore si collocherà in corrispondenza del paniere $X_2(0, Y/p_2)$ (consumo del solo bene x_2).

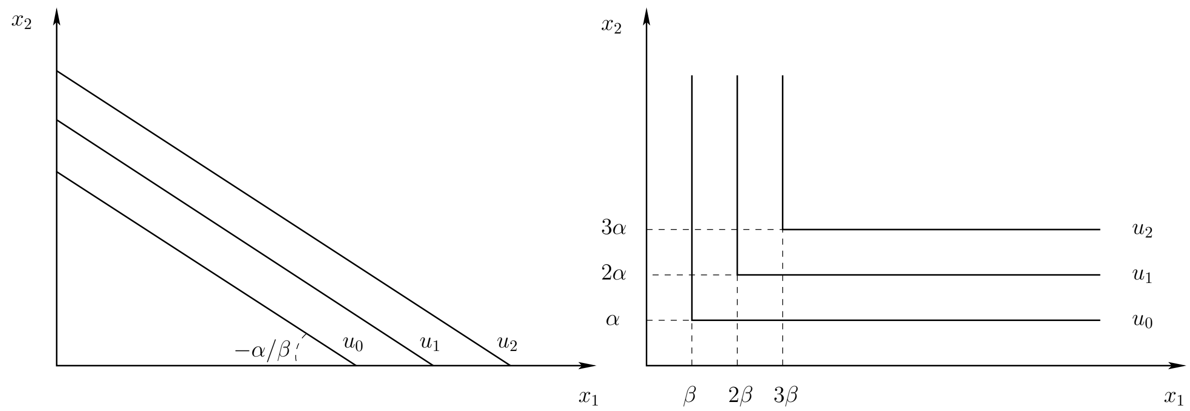


Elasticità di sostituzione: $\sigma = \dfrac{\dfrac{\partial x_2/x_1}{x_2/x_1}}{\dfrac{\partial|\text{SMS}(x_1,x_2)|}{|\text{SMS}(x_1,x_2)|}} = \dfrac{\partial x_2/x_1}{\partial|\text{SMS}(x_1,x_2)|}\dfrac{|\text{SMS}(x_1,x_2)|}{x_2/x_1} = \dfrac{\partial \ln(x_2/x_1)}{\partial \ln|\text{SMS}(x_1,x_2)|}$

La pendenza e la curvatura delle curve di indifferenza definisce la tipologia di beni:

(a) Perfetta sostituibilità:
$q = \alpha x_1 + \beta x_2$
curve di indifferenza lineari
$\text{SMS}(x_1,x_2) = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ (costante rispetto a x_1 e x_2)

(b) Perfetta complementarità:
$q = A\min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$
curve di indifferenza "ad angolo retto"
$\alpha x_1 = \beta x_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ (proporzioni fisse)



dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono parametri, $A > 0$ è una costante moltiplicativa.

24 Tipi di elasticità - gio 27/03/2025

Domanda di un bene

L'equazione di domanda di un bene da parte di un singolo consumatore è, ad esempio,

$$x_1 = x_1(\underset{(-)}{p_1}, \underset{(\pm)}{p_2}, \underset{(+)}{Y}),$$

dove

- $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ per la legge generale di domanda (può essere derogato),
- $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_2} \gtreqless 0$ perché il bene alternativo (x_2) potrebbe essere sostituto, indipendente oppure complementare,
- $\dfrac{\partial x_1}{\partial Y} > 0$ perché più di ha disponibilità monetaria e più si tende a consumare (può essere derogato).

1. Elasticità della domanda al prezzo

L'elasticità della domanda al prezzo è uno strumento di misurazione delle variazioni della quantità domandata in base alle variazioni del prezzo che sia indipendente dall'unità di misura adottata. In particolare essa si identifica nel **rapporto delle variazioni percentuali (relative)** di x_1 e p_1

$$\varepsilon_{x_1,p_1} = \frac{\partial x_1}{x_1} \Big/ \frac{\partial p}{p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = \frac{\partial \ln x_1}{\partial \ln p_1}$$

Proprietà:

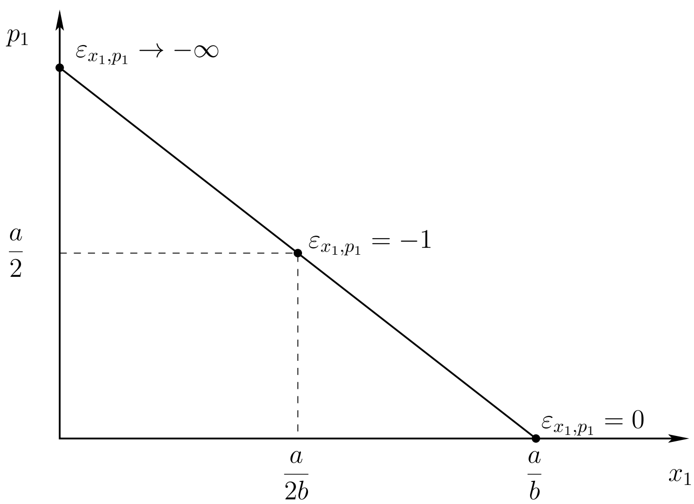
1. poiché in generale vale $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$, allora risulta $\varepsilon_{x_1,p_1} < 0$;
2. di norma il valore di ε_{x_1,p_1} varia lungo la curva di domanda. In particolare, per le funzioni di domanda **lineari** d: $p_1 = a - bx_1$, risulta infatti

   $$x_1 = \frac{a - p_1}{b}$$

   quindi

   $$\varepsilon_{x_1,p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{1}{b}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{1}{\cancel{b}}\frac{p_1}{\frac{a-p_1}{\cancel{b}}} = -\frac{p_1}{a-p_1},$$

   dove il denominatore è $a - p_1 > 0$ per definizione. Da questa equazione emerge chiaramente che $\varepsilon_{x_1,p_1} \in (-\infty, 0]$.



Si hanno perciò i seguenti scenari:

- se $x_1 = 0$, risulta $p_1 = a > 0$, quindi $\varepsilon_{x_1,p_1} \to -\infty$: la funzione di domanda è **perfettamente elastica**,
- se $x_1 > 0$, $p_1 \in (0, a)$ e $\varepsilon_{x_1,p_1} \in (-\infty, -1]$ la funzione di domanda è **elastica**,
- se $x_1 > 0$, $p_1 \in (0, a)$ e $\varepsilon_{x_1,p_1} \in (-1, 0)$ la funzione di domanda è **rigida**,
- se $p = 0$, risulta $x_1 = \dfrac{a}{b} > 0$, quindi $\varepsilon_{x_1,p_1} = 0$: la funzione di domanda è **perfettamente rigida**.

3. esistono funzioni di domanda isoelastiche del tipo $x_1 = c_0\, p_1^{\eta}$, con $c_0 > 0$, per le quali vale $\varepsilon_{x_1,p_1} = \eta$. Per la relazione inversa che generalmente si instaura tra quantità domandata e prezzo, in questo caso deve risultare $\eta \leq 0$.

   N.B.$\rightarrow$ Casi particolari delle funzioni isoelastiche sono le seguenti curve di domanda **lineari**:

   (a) $\varepsilon_{q,p_1} = 0$: curve di domanda **perfettamente rigida** o **verticale**,

   (b) $\varepsilon_{q,p_1} \to -\infty$: curve di domanda **perfettamente elastica** o **orizzontale**.

4. In molti testi di Economia Politica, di prassi si considera il valore assoluto dell'elasticità $|\varepsilon_{x_1,p_1}|$.

2. Elasticità della spesa al prezzo

Poiché la spesa per il bene x_1 è data da $E_1 = p_1 x_1$, l'elasticità della spesa al prezzo è perciò

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{E_1,p_1} &= \frac{\partial E_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{E_1} \\
&= \frac{\partial (p_1 x_1)}{\partial p_1}\frac{\cancel{p_1}}{\cancel{p_1} x_1} \\
&= \left(x_1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_1} p_1\right)\frac{1}{x_1} \\
&= 1 + \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{1}{x_1} \\
&= 1 + \varepsilon_{x_1,p_1}
\end{aligned}$$

Se $\varepsilon_{x_1,p_1} \in (-\infty, 0]$ significa che $\varepsilon_{E_1,p_1} \in (-\infty, 1]$, infatti:

- quando $\varepsilon_{x_1,p_1} \to -\infty \Rightarrow \varepsilon_{E_1,p_1} \to -\infty$: quando l'elasticità della domanda al prezzo è infinita significa che per un dato livello di prezzo i consumatori possono variare la quantità a piacimento, quindi la spesa $E_1 = p_1 x_1$ si "adatta" allo stesso modo. Relazione inversa tra prezzo e spesa (se $p_1 \uparrow$, allora $x_1 \downarrow$ e $E_1 \downarrow$ e viceversa);

- quando $\varepsilon_{x_1,p_1} \to -1 \Rightarrow \varepsilon_{E_1,p_1} \to 0$: se l'elasticità della domanda al prezzo è pari a -1 significa sostanzialmente che la variazione percentuale della quantità è pari alla variazione percentuale del prezzo, ma di segno opposto. Ciò significa che per qualsiasi variazione del prezzo la spesa E_1 resta sempre costante, quindi la spesa stessa risulta essere perfettamente rigida rispetto al prezzo;

- quando $\varepsilon_{x_1,p_1} \to 0 \Rightarrow \varepsilon_{E_1,p_1} \to 1$: l'elasticità della spesa al prezzo assume valore positivo, quindi un aumento percentuale del prezzo produce un aumento percentuale della spesa. Osservando la definizione $E_1 = p_1 x_1$ è evidente che, se la quantità domandata (perfettamente rigida) resta costante, un aumento del prezzo porta necessariamente verso un aumento della spesa.

3. Elasticità incrociata della domanda

La quantità domandata di un bene in oggetto (ad esempio, x_1) dipende anche dal prezzo di un bene ad esso alternativo (ad esempio, p_2 che ne costituisce il costo opportunità); l'elasticità incrociata della domanda serve per la valutazione questa dipendenza. Definizione:

$$\varepsilon_{x_1,p_2} = \frac{\partial x_1}{p_2} \Big/ \frac{\partial p_2}{p_2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = \frac{\partial \ln x_1}{\partial \ln p_2}.$$

I valori possibili dell'elasticità incrociata dipendono dal significato che assume l'aggettivo "alternativo", quindi:

- se $\varepsilon_{x_1,p_2} \to -\infty$: beni perfettamente complementari.
- se $\varepsilon_{x_1,p_2} < 0$: beni complementari,
- se $\varepsilon_{x_1,p_2} = 0$: beni indipendenti,
- se $\varepsilon_{x_1,p_2} > 0$: beni sostituti o succedanei,
- se $\varepsilon_{x_1,p_2} \to +\infty$: beni perfetti sostituti.

Da questi scenari emerge chiaramente che $\varepsilon_{x_1,p_2} \in (-\infty, +\infty)$.

4. Elasticità della domanda al reddito

Elasticità della domanda al reddito:

$$\varepsilon_{x_1,Y} = \frac{\partial x_1}{x_1} \Big/ \frac{\partial Y}{Y} = \frac{\partial x_1}{\partial Y}\frac{Y}{x_1} = \frac{\partial \ln x_1}{\partial \ln Y}$$

dove x_1 è la quantità domandata del bene, mentre Y è il reddito. Mentre l'elasticità della domanda al prezzo è sempre negativa, quella rispetto al reddito dipende dalla conformazione delle **Curve Engeliane di domanda** (o **Curve Reddito-Consumo**).

4. Elasticità della domanda al reddito

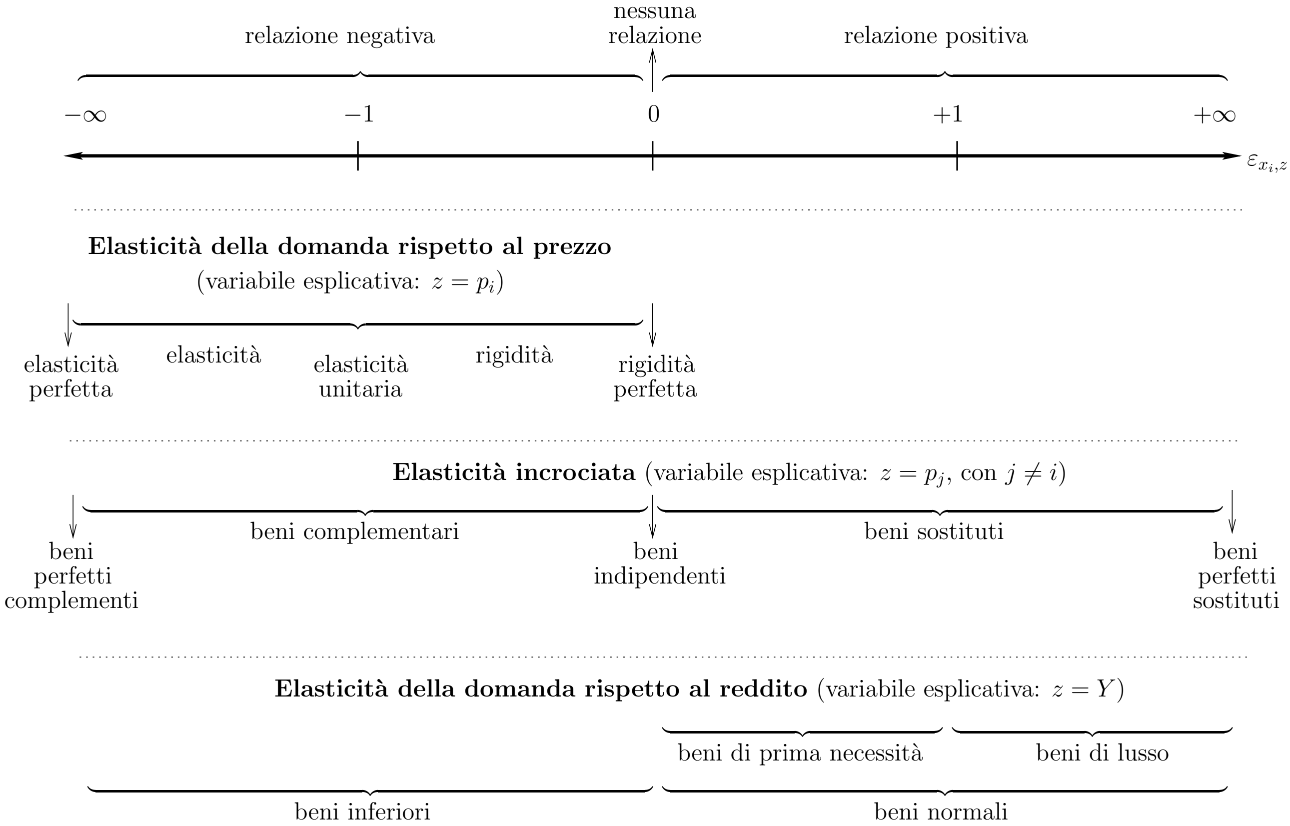
Curve Engeliane di domanda:

bene	tipologia	curva (rispetto a Y)	elasticità
inferiore	-	non crescente	$\varepsilon_{x_1,Y} < 0$
normale	di prima necessità	non decrescente convessa*	$0 < \varepsilon_{x_1,Y} < 1$
normale	di lusso	non decrescente concava*	$\varepsilon_{x_1,Y} > 1$

*NOTA: Convessità e concavità dipendono dal sistema di riferimeti Cartesiani adottato per disegnare la curva Engeliana di domanda. In tabella si suppone che il grafico sia stato tracciato con x_1 in ascissa e Y in ordinata. In molti testi tuttavia è possibile trovare x_1 in ordinata e Y in ascissa: in questo caso convessità e concavità vanno scambiati in tabella.

[Grafico delle curve Engeliane di domanda]

Schema riassuntivo dei principali tipi di elasticità $\varepsilon_{y,z}$
(estratto da Palomba e Staffolani, 2023, Appendice al capitolo 4)



Esercizi 4 - mar 01/04/2025

Scelte di consumo tra due beni/servizi

1. **(dall'esame del 15/02/2023)** Un consumatore la cui funzione di utilità è data da $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$, ha scelto di consumare $x_1 = 14$. Sapendo che $p_1 = 16$€ e $p_2 = 4$€, si determini il reddito (Y) del consumatore.

   $[Y = 448€]$

2. **(dall'esame del 23/09/2022)** La funzione di utilità di un consumatore è $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, 4x_2\}$. Con un reddito pari a $Y = 900$€ e con $p_1 = 2$€ e $p_2 = 4$€, si determinino le quantità acquistate dei due beni.

   $[x_1^* = 300, = x_2^* = 75]$

3. **(dall'esame del 23/09/2022)** La funzione di utilità di un consumatore è data da $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$ e i prezzi dei beni sono rispettivamente pari a $p_1 = 10$€ e $p_2 = 15$€. Si determini il reddito del consumatore (Y) che decide di acquistare 27 unità del bene 1.

   $[Y = 540€]$

4. **(dall'Esame dell'11/06/2014)** Si determini la domanda dei beni 1 e 2 sapendo la funzione di utilità del consumatore è $u(x_1, x_2) = 8\ln(x_1 x_2)$, il suo reddito è pari a $Y = 360$€, mentre i prezzi dei beni sono rispettivamente $p_1 = p_2 = 6$€.

   $[(x_1^*; x_2^*) = (30; 30)]$

5. **(dall'Esame dell'08/02/2017)** Il saggio marginale di sostituzione tra due beni x_1 e x_2, nel piano (x_1, x_2), è $\text{SMS}(x_1, x_2) = -2$. Dati i prezzi $p_1 = 6$€ e $p_2 = 2$€, sapendo che il reddito del consumatore ammonta a $Y = 450$€, si determinino le quantità acquistate da tale consumatore.

   $[x_1^* = 0;\ x_2^* = 225]$

6. **(dall'Esame del 09/09/2015)** La funzione di utilità di un consumatore è data da $u = 2x_1^2 x_2$; egli dispone di un reddito $Y = 240$€ e ripartisce il suo consumo su due beni che hanno rispettivamente prezzo $p_1 = 4$€ e $p_2 = 10$€. Di quanto varia la quantità consumata dei due beni se il prezzo p_1 raddoppia? **[3 pt]**

   $[\Delta x_1 = -20;\ \Delta x_2 = 0]$

7. **(dall'Esame del 10/02/2016)** Le preferenze di un individuo circa il consumo dei beni x_1 e x_2 sono descritte dalla funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Se i prezzi dei due beni sono rispettivamente $p_1 = 16$€ e $p_2 = 20$€, di quanto aumenterebbe in termini percentuali la domanda ottimale del bene x_1 se il reddito aumentasse del 16%? **[3 pt]**

   $$\left[\frac{\Delta x_1}{x_1} = 16\%\right]$$

8. **(dall'Esame del 07/06/2016)** Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = 4\ln x_1 + \ln x_2$, si calcoli il saggio marginale di sostituzione nel punto in cui il consumo di x_1 è 2 volte quello di x_2.

   $[\text{SMS}(x_1, x_2) = -2]$

9. **(dall'Esame del 13/07/2016)** Un consumatore con funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1^{1/9} x_2^{1/3}$, dispone di un reddito Y. Sapendo che il prezzo del bene 2 è $p_2 = 1€$, si calcoli la quota di reddito spesa per acquistare il bene 1 (*si scriva la soluzione attraverso la frazione* $p_1 x_1 / Y$).

$\left[\frac{p_1 x_1}{Y} = 0.25\right]$

10. **(dall'Esame del 06/09/2016)** Un consumatore razionale ha preferenze circa il consumo dei beni x_1 e x_2 stabilite dalla funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Il prezzo del bene 1 è pari a $p_1 = 8€$, mentre il prezzo del bene 2 è $p_2 = 1€$. Quanto reddito Y^* dovrebbe avere a disposizione affinché questo individuo possa avere un'utilità pari a $\bar{u}(x_1, x_2) = 18$?

$[Y^* = 24€]$

11. **(dall'Esame del 15 gennaio 2018)** Siano $x_1 = 14$ e x_2 le quantità ottimali acquistate da un consumatore nel periodo 1, con prezzi $p_1 = 1€$ e $p_2 = 2€$. Si assuma che nel periodo 2 il prezzo del bene 1 raddoppi, mentre il prezzo del bene 2 si dimezzi. Per quale livello minimo di x_2 il consumatore vede sicuramente non ridursi la sua utilità in seguito alla variazione dei prezzi?

$[x_2 > 14]$

12. **(dall'Esame del 12 febbraio 2018)** La funzione di utilità di un individuo è $u(x_1, x_2) = \min\{0.25x_1, x_2\}$. I prezzi dei beni sono $p_1 = 1€$ e $p_2 = 6€$. Si determini l'elasticità della domanda del bene 1 al prezzo del bene 2 nella situazione di ottimo consumo di questo individuo. **[3 pt]**

$[\varepsilon_{x_1, p_2} = -0.6]$

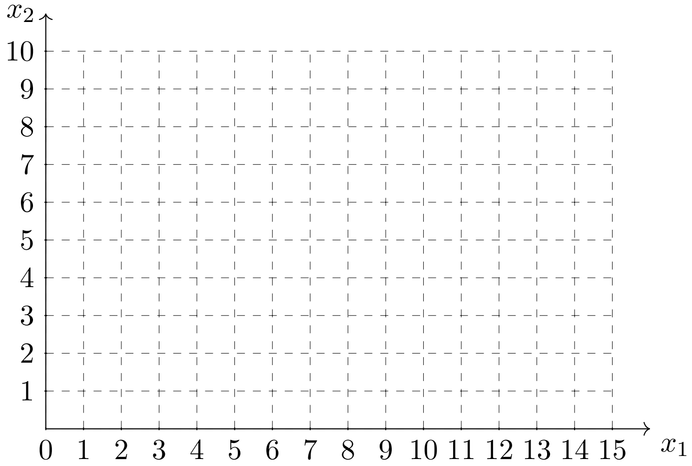
13. **(dall'Esame dell'8 febbraio 2019)** La funzione di utilità di un individuo circa il consumo delle quantità dei due beni x_1 e x_2 è data da $u(x_1, x_2) = \min\{18x_1, x_2\}$. Sapendo che il reddito è pari a $Y = 100€$, mentre i prezzi sono $p_1 = 2€$ e $p_2 = 1€$, si calcoli l'utilità indiretta $u(x_1^*, x_2^*)$.

$[u(x_1^*, x_2^*) = 90]$

14. **(dall'Esame del 29 giugno 2016)** Un consumatore deve scegliere il paniere ottimale (x_1^*, x_2^*) avendo a disposizione la somma $Y = 11€$ e sapendo che i prezzi sono $p_1 = p_2 = 1$. Riguardo alla rappresentazione grafica delle preferenze si hanno le seguenti informazioni: i beni sono perfetti sostituti ed una retta di indifferenza passa per i punti $(3, 2)$ e $(2, 4)$. **[3 pt]**
(**Suggerimento**: nel sistema Cartesiano, x_1 va posto sull'asse delle ascisse)

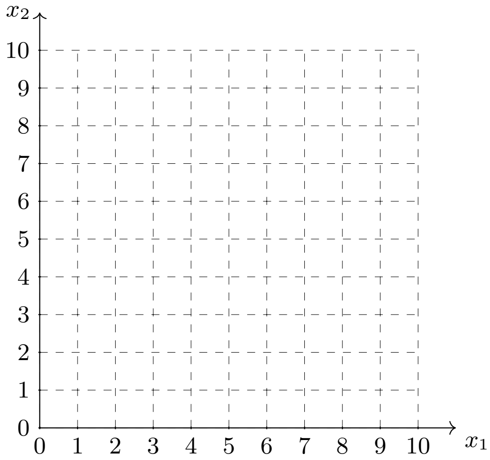
$[(x_1^*; x_2^*) = (11; 0)]$

15. **(dall'Esame del 18 gennaio 2019)** Nel grafico sottostante, si disegni la curva di indifferenza passante per il paniere $A \equiv (4, 4)$ e che abbia $|\text{SMS}(x_1, x_2)| = 1$ costante. Si determini inoltre il paniere di equilibrio del consumatore sapendo che giace lungo la curva di indifferenza e che il prezzo del bene 1 è il doppio del prezzo del bene 2.



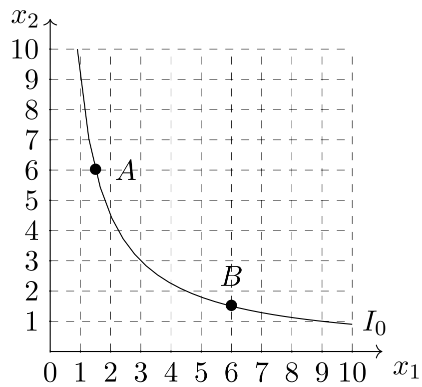
$[(x_1^*, x_2^*) = (0, 8)]$

16. **(dall'Esame del 07/09/2023)** Nel grafico sottostante si rappresenti con precisione il sentiero di espansione del consumo della funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \min\{0.8x_1, x_2\}$.



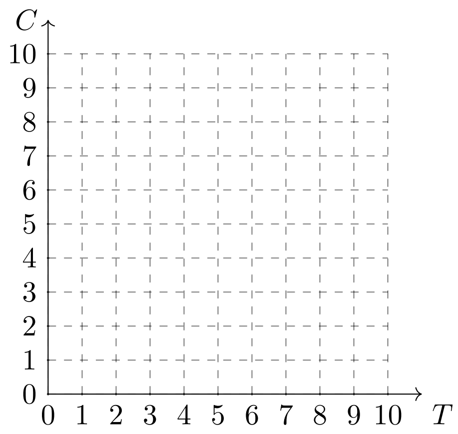
$[x_2 = 0.8x_1]$

17. **(dall'Esame del 10 luglio 2023)** Un consumatore ha funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Nel grafico sottostante è rappresentata una curva di indifferenza I_0 sulla quale sono evidenziati due panieri $A \equiv (1.5, 6)$ e $B \equiv (6, 1.5)$. Si calcoli l'utilità indiretta relativa al paniere A. Si consideri inoltre il paniere $P = 0.5(A + B)$ e lo si rappresenti nel grafico con un asterisco. Infine, utilizzando i simboli "$\succ$" e "$\sim$", si stabilisca la gerarchia delle preferenze del consumatore tra i 3 panieri A, B e P. **[3 pt]**



$[3, P(3.75, 3.75), P > A\ B]$

18. **(dall'Esame del 15 settembre 2023)** A Mario piace il caffè e, per ogni tazzina di caffè, utilizza esattamente 4 cucchiaini di zucchero. Nel piano cartesiano sottostante, che ha le tazzine di caffè T sulle ascisse e i cucchiaini di zucchero C sulle ordinate, si rappresenti con precisione il sentiero di espansione del consumo di Mario.



[$C = 4T$]

19. **(dall'Esame del 19 gennaio 2024)** Un consumatore ha scelto il paniere dei beni $P_1 = (5, 15)$ dove i valori corrispondono alle quantità acquistate dei beni x_1 e x_2 rispettivamente. Successivamente, a causa di una variazione dei prezzi relativi, ha acquistato 9 quantità di x_2. Se i due beni sono perfettamente complementari, qual è la quantità acquistata di x_1 a seguito della variazione dei prezzi?

[$x_1 = 3$]

Elasticità della domanda al prezzo

20. **(dall'Esame del 5 aprile 2017)** Data la funzione di domanda $p = 12 - Q$, calcolate l'elasticità della domanda rispetto al prezzo quando la quantità venduta è pari a $Q = 6$ *(indicare il segno)*.

$\left[\varepsilon_{Q^d,p} = -1\right]$

21. **(dall'Esame del 18 gennaio 2019)** L'elasticità della domanda rispetto al prezzo di un bene è pari a $\varepsilon_{q^d,p} = -0.1$. Si supponga che una variazione delle condizioni di mercato abbia ridotto la quantità scambiata del 10%. Sapendo che il prezzo del bene è $p = 30$€, qual è il nuovo prezzo di equilibrio?

[$p^* = 60$€]

22. **(dall'Esame del 20 aprile 2016)** Se la funzione di domanda di un bene è $Q^d = 3p^{-4}$ ed il prezzo aumenta del 3%, di quanto varierebbe la quantità domandata in termini percentuali? (*indicare il segno*).

$\left[\text{variazione percentuale } Q^d = -12\%\right]$

23. **(dall'Esame del 28 giugno 2017)** Nel Comune di Mazzaferro $N = 80$ famiglie pagano 10€ al mese per usufruire dello scuolabus. Sapendo che l'elasticità al prezzo della domanda di scuolabus è pari a $\varepsilon_{N,p} = -0.4$, se il Comune modificasse il prezzo dello scuolabus portandolo a 15€, di quanti Euro varierebbero le sue entrate? (*indicare il segno*)

[ΔRT = 160€]

24. **(dall'Esame del 14 gennaio 2022)** Si supponga che nel 2022 il prezzo di un Chilo-Watt/ora (KWH) diminuisca da 4€ a 2€ e che, di conseguenza, il consumo medio di un cittadino passi da 4 KWH a 6 KWH. Si determini il valore di elasticità dei KWH rispetto al prezzo $\varepsilon_{\text{KWH},p}$. In alternativa, si può calcolare l'elasticità ad arco. (*si indichi il segno*)

[$\varepsilon_{\text{KWH},p} = -1$ (arco: $\widehat{\varepsilon}_{\text{KWH},p} = -0.6$)]

25. **(dall'esame del 19 gennaio 2023)** Nel 2022 una nota impresa che produce automobili elettriche ha venduto $Q_{2022} = 200\,000$ automobili. Supponendo che, come nel 2022, anche nel 2023 la funzione di domanda abbia elasticità contante rispetto al prezzo pari a $\varepsilon_{Q,p} = -0.8$, quante automobili la stessa impresa si aspetta di vendere trovandosi a dover aumentare il prezzo del 7.5%?

[$Q_{2023} = 188\,000$]

Elasticità della spesa al prezzo

26. **(dall'Esame dell'11 novembre 2016)** Si calcoli l'elasticità della spesa al prezzo ($\varepsilon_{E,p}$) di un bene la cui funzione di domanda diretta è data da $Q = 2p^{-0.4}$.

[$\varepsilon_{E,p} = 0.6$]

27. **(dall'Esame dell'8 luglio 2020)** Data la funzione di domanda $p = 120 - 0.5q$, si determini l'elasticità della spesa al prezzo ($\varepsilon_{E,p}$) quando la quantità domandata dai consumatori è $q = 60$. (*si indichi il segno*)

[$\varepsilon_{E,p} = -2$]

28. **(dall'Esame del 16 febbraio 2021)** Per un individuo la funzione di domanda del bene x è data da $x = 40 - 5p$. Se l'individuo consuma una quantità tale che l'elasticità della domanda rispetto al prezzo vale $\varepsilon_{x,p} = -1$, a quanto ammonta la spesa per il consumo del bene x?

[$E = 80$€]

29. **(dall'Esame del 10 giugno 2021)** La funzione di domanda di mercato del bene Q è data da $Q = 23 - p$. Si calcoli il valore del prezzo (p) tale per cui l'elasticità della spesa al prezzo sia pari a $\varepsilon_{E,p} = -21$.

[$p = 22$€]

30. **(dall'Esame del 12 febbraio 2018)** Utilizzando sofisticate tecniche econometriche, un brillante studente dell'Università Politecnica delle Marche ha calcolato che la curva di domanda di un certo prodotto è rappresenta dalla funzione $Q = 2 + 1/p$. Si determini l'elasticità della spesa totale di tale prodotto rispetto al prezzo ($\varepsilon_{E,p}$) nel punto in cui la quantità venduta sia $Q = 10$.

[$\varepsilon_{E,p} = 0.2$]

31. **(dall'Esame del 29 maggio 2016)** Studi di mercato su un certo prodotto hanno calcolato che la curva di domanda è rappresentata dalla funzione $Q^d = 0.2 - \ln p$. Si determini l'elasticità della spesa totale rispetto al prezzo ($\varepsilon_{E,p}$) nel punto in cui la quantità venduta sia $Q = 0.2$.

[$\varepsilon_{E,p} = -4$]

32. **(dall'esame dell'11 luglio 2018)** Nel mercato del caffè espresso, la funzione di domanda è $q = \dfrac{Y - 2p'}{2p^{0.8}}$, dove p' è il prezzo di un Kg di zucchero e Y è il reddito dei consumatori. Si determini il valore dell'elasticità della domanda di caffè rispetto al proprio prezzo p.

[$\varepsilon_{q,p} = -0.8$]

33. **(dall'esame del 23 settembre 2022)** La funzione di spesa di una famiglia per il bene q è $E = 24q - 2q^2$. Si calcoli il valore della spesa quando l'elasticità della domanda rispetto al prezzo è pari a $\varepsilon_{q,p} = -1$.

[$E = 72$€]

Elasticità incrociata

34. **(dall'Esame del 16 gennaio 2017)** La funzione di domanda di un consumatore per il bene 1 è data da $x_1 = M - 10p_1 + p_2$; si calcoli l'elasticità del consumo del bene 1 rispetto al prezzo del bene 2 sapendo che il reddito è pari a $M = 450$€, il prezzo del bene 1 è pari a $p_1 = 25$€, mentre il prezzo del bene 2 è pari a $p_2 = 50$€.

[$\varepsilon_{x_1,p_2,}$=0.2]

35. **(dall'Esame del 7 settembre 2022)** Si ipotizzi che il prezzo del bene x_1 aumenti del 5% e, di conseguenza, la domanda del bene x_2 passi da 100 a 10 unità. Si calcoli l'elasticità incrociata. Si indichi anche se i beni sono sostituti o complementari.

[$\varepsilon_{x_2,p_1} = -18$ (beni complementari)]

36. **(dall'Esame del 12 luglio 2017)** La domanda del bene x_1 è data dalla seguente funzione $x_1 = \frac{M^{0.5}p_2^{0.2}}{p_1^{0.4}}$, dove M è il reddito, p_1 il prezzo del bene 1 e p_2 il prezzo di un altro bene x_2. Si calcoli l'elasticità incrociata della domanda del bene x_1 rispetto al prezzo del bene x_2 e si indichi se i due beni sono complementari, sostituti o indipendenti.

◯ beni complementari ◯ beni sostituti ◯ beni indipendenti

[$\varepsilon_{x_1,p_2,}$=0.2, beni sostituti]

37. **(dall'Esame del 28 giugno 2021)** Si consideri la funzione di domanda $x_1 = -4p_1 - p_2 + 0.25Y$, dove il prezzo del bene e il reddito valgono rispettivamente $p_1 = 25$€ e $Y = 960$€. Si calcoli il valore dell'elasticità incrociata quando il prezzo del bene alternativo è $p_2 = 60$€.

[$\varepsilon_{x_1,p_2} = -0.75$]

38. **(dall'Esame del 4 settembre 2020)** Data la funzione di domanda $x_2 = 121 - 7p_2 - 3p_1$, si calcoli l'elasticità incrociata della domanda del bene x_2 rispetto al prezzo del bene x_1, sapendo che i prezzi ammontano rispettivamente a $p_1 = 20$€ e $p_2 = 8$€. In base al valore ottenuto si indichi la natura dei due beni.

[$\varepsilon_{x_2,p_1} = -12$ (beni complementari)]

Elasticità della domanda al reddito

39. **(dall'Esame del 16 febbraio 2021)** La relazione tra consumo del bene x e reddito M è rappresentata dalla funzione $x = M^{1.5} + 2M$. Si calcoli il valore dell'elasticità del consumo del bene x rispetto al reddito quando quest'ultimo è pari a $M = 529$€.

[$\varepsilon_{x,M} = 1.46$]

40. **(dall'Esame del 23 settembre 2016)** La relazione tra consumo del bene x e reddito M è rappresentata dalla funzione $x = 10M + M^2$. Calcolate il valore dell'elasticità della domanda rispetto al reddito quando quest'ultimo è uguale a $M = 10$€.

[$\varepsilon_{x,M} = 1.5$]

41. **(dall'Esame del 13 luglio 2016)** L'elasticità della domanda del bene 1 (x_1) rispetto al reddito (Y) è pari a $\varepsilon_{x_1,Y} = \dfrac{16+2Y}{30+Y}$. Per quale valore minimo di Y il bene è un bene di lusso?

[$Y_{\min} = 14$€]

42. **(dall'Esame del 28 giugno 2017)** La relazione tra consumo del bene x e reddito M è stabilita dall'equazione $x = 1 - \dfrac{14}{M}$. Si determini il valore massimo di M affinché il bene x sia di lusso.

[$M_{\max} = 28$€]

Miscellanea

43. **(dall'Esame del 23 settembre 2016)** Sia data la funzione di domanda $x = M^{2.5}p^{-1.5}$ dove M è il reddito del consumatore e p il prezzo del bene x. Supponendo che sia il reddito che il prezzo aumentino del 3%, quale sarà la variazione percentuale del consumo del bene x?

[variazione percentuale = 3%]

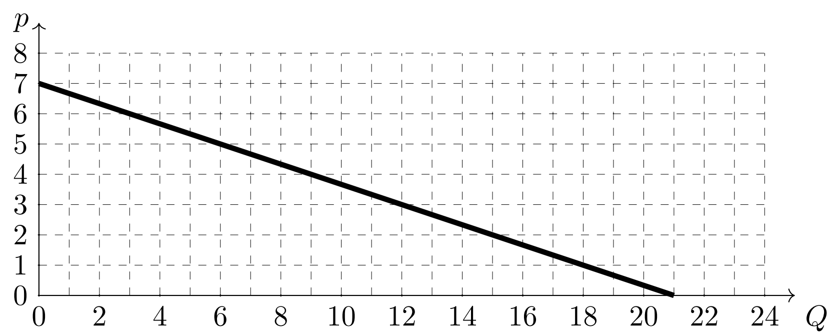
44. **(dall'esame del 12 febbraio 2020)** La funzione completa di domanda del bene x è data da $x = \dfrac{p_y^{0.3}M^{0.7}}{p_x^{0.5}}$, dove p_x indica il prezzo, p_y è il prezzo di un bene alternativo, mentre M è il reddito. Si determini la variazione percentuale del bene quando le variabili p_x, p_y e M aumentano tutte del 21%.

$$\left[\frac{\Delta x}{x} \times 100 = 10\%\right]$$

45. **(dall'esame del 23 settembre 2022)** La funzione di offerta di ore-lavoro di un individuo è $h = w^{0.55}$, dove w è il salario orario. Assumendo che la domanda di lavoro sia perfettamente elastica, di quanto varia percentualmente il suo reddito da lavoro (m) se il salario diminuisce del 2%? (*si indichi il segno*)

$$\left[\frac{\Delta m}{m} = -3.1\%\right]$$

46. **(dall'esame del 17 settembre 2018)** La figura rappresenta la funzione di domanda di mercato di un certo bene. Se risulta $Q = 15$, a quanto ammonta l'elasticità della domanda al prezzo?



[$\varepsilon_{Q^d,p} = -0.4$]

25 Statica comparata, utilità indiretta - mer 02/04/2025

1. Statica comparata: variazione del reddito

Si consideri le funzioni generali di domanda dei beni 1 e 2, date da

$$\begin{cases} x_1^* = x_1(p_1, p_2, Y) \\ x_2^* = x_2(p_2, p_1, Y), \end{cases}$$

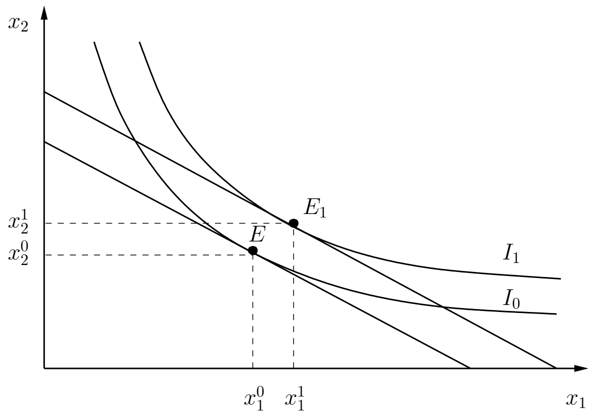
dove, per entrambe, la prima variabile è endogena (p_1 è il prezzo del bene 1 e p_2 è il prezzo del bene 2), mentre tutte le altre sono esogene (prezzo dell'altro bene, reddito del consumatore, si ricorda che il gusto dei consumatori non è considerata).

(a) Variazione del reddito (Y): si consideri l'equazione del vincolo di bilancio

$$Y = p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{Y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1.$$

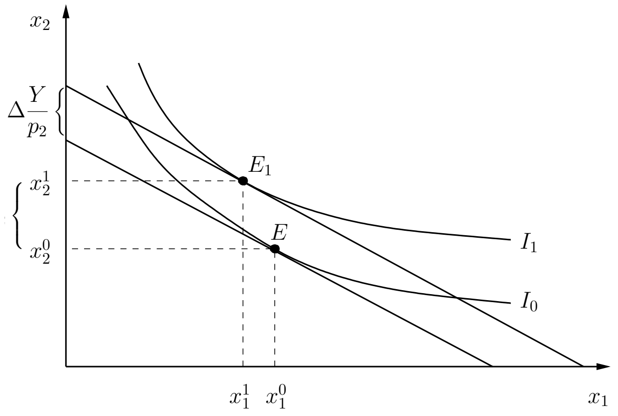
L'aumento esogeno del reddito disponibile ($Y \uparrow$) determina uno spostamento a destra della retta vincolo di bilancio avvenuto a seguito di un aumento dell'intercetta ($Y/p_2 \uparrow$). Dal punto di vista economico un aumento del reddito migliora l'utilità del consumatore che può così spostarsi su una curva di indifferenza più lontana dall'origine.

x_1 e x_2 beni normali

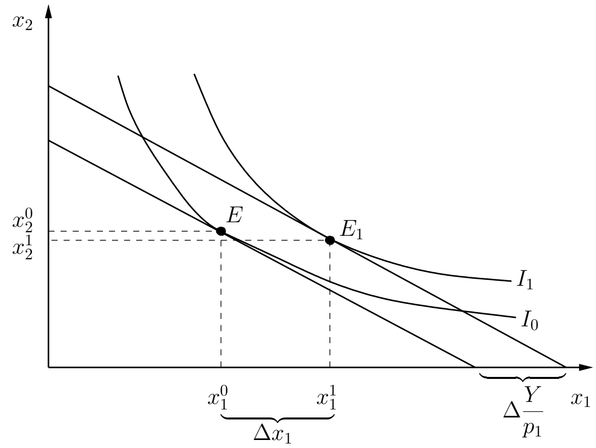


Quando $Y \uparrow$ deve aumentare il consumo di almeno un bene. L'aumento del consumo di entrambi i beni o di uno dei due dipende esclusivamente dalla forma delle curve di indifferenza, quindi dai gusti dei consumatori.
Questo tipo di indagine è strettamente legata alle Curve Engeliane di domanda (si veda pag. 80).

x_1 bene inferiore ($\Delta x_1 < 0$, $\varepsilon_{x_1,Y} < 0$)
x_2 bene di lusso ($\Delta x_2 > \Delta Y$, $\varepsilon_{x_2,Y} > 1$)



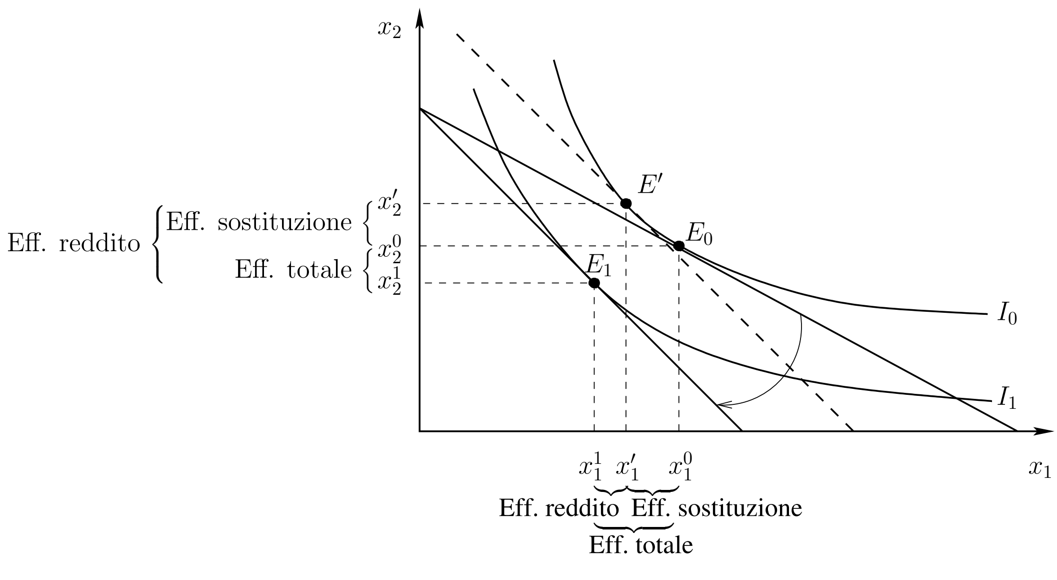
x_1 bene di lusso ($\Delta x_1 > \Delta Y$, $\varepsilon_{x_1,Y} > 1$)
x_2 bene inferiore ($\Delta x_2 < 0$, $\varepsilon_{x_2,Y} < 0$)



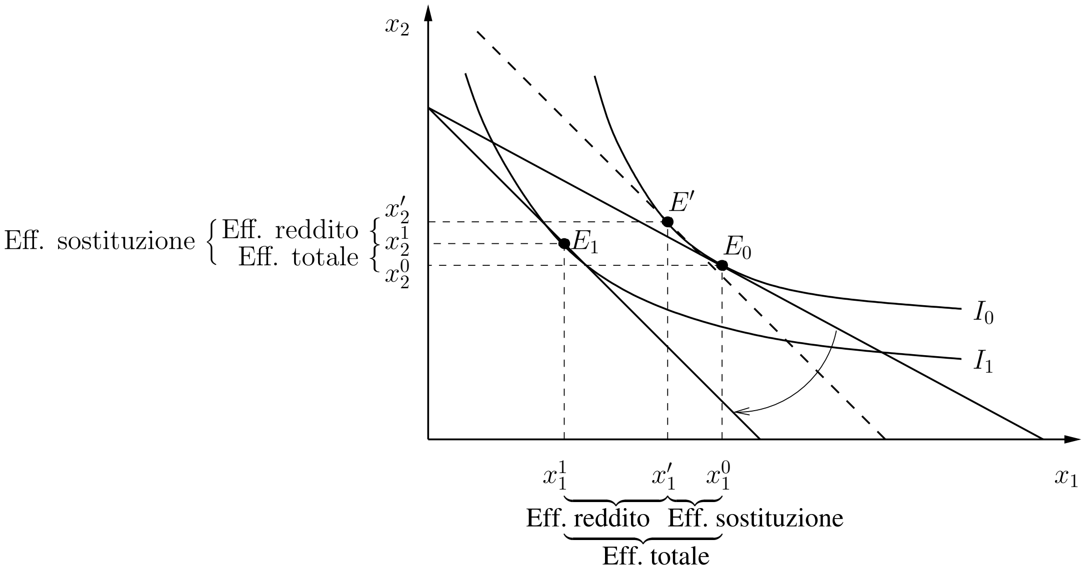
2. Statica comparata: variazione dei prezzi

Variazione del prezzo p_1: l'aumento esogeno del prezzo del bene 1 determina un cambiamento nel coefficiente angolare ($p_1/p_2 \uparrow$) della retta vincolo di bilancio che ruota verso sinistra (l'intercetta non cambia). Dal punto di vista economico si ha una compressione del vincolo di bilancio del consumatore che diventa relativamente più povero, in quanto il costo di uno dei beni è aumentato; ciò determina una perdita di utilità, quindi uno spostamento su una curva di indifferenza più vicina all'origine.

- x_1 e x_2 beni complementari ($\varepsilon_{x_2,p_1} < 0$, $x_1 \downarrow$, $x_2 \downarrow$)

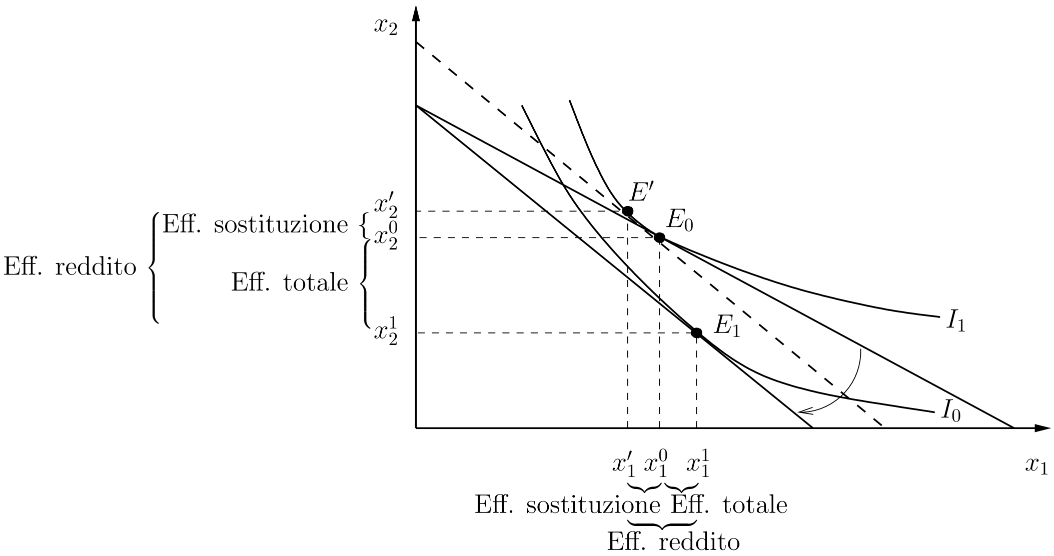


- x_1 e x_2 beni sostituti ($\varepsilon_{x_2,p_1} > 0$, $x_1 \downarrow$, $x_2 \uparrow$)



- **Paradosso di Giffen:** quando $p_1 \uparrow$, il paradosso consiste nel fatto che il consumatore aumenta la domanda del bene 1. Tale bene viene perciò definito cone **bene di Giffen** e, come tale, è un bene inferiore. (Sir Robert Giffen, 1837-1910). Di fatto si ottiene una curva di domanda di x_1 inclinata positivamente, cioè

$$x_1 = x_1(\underset{(+)}{p_1}, p_2, Y, g, N).$$

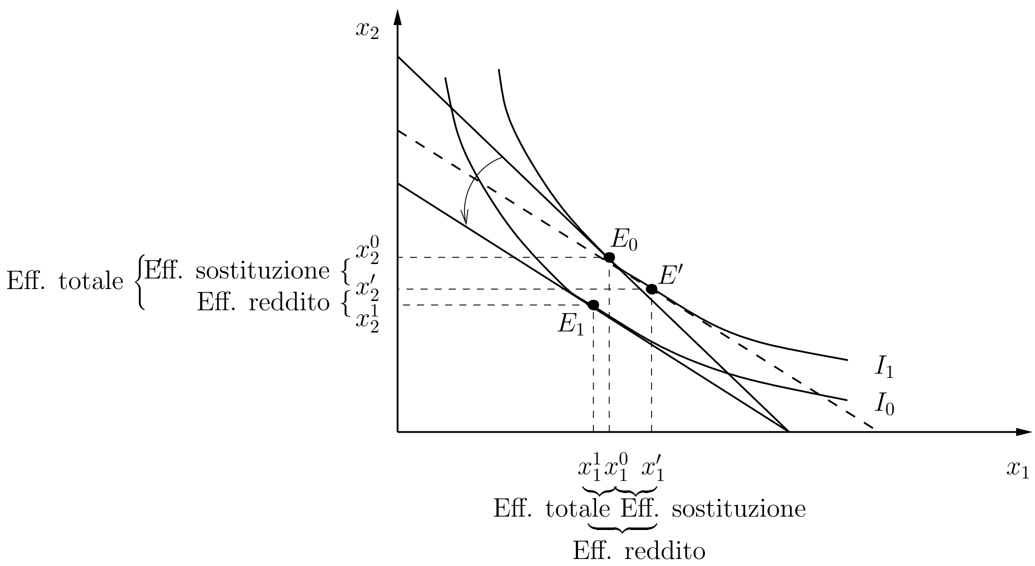


	beni x_1 e x_2:	complementari		sostituti		bene 1 di Giffen	
Effetto	descrizione	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
Sostituzione (ES)	passaggio da E_0 ad E'	-	+	-	+	-	+
Reddito (ER)	passaggio da E' ad E_1	-	-	-	-	+	-
totale (ET)	passaggio da E_0 ad E_1	-	-	-	+	+	-

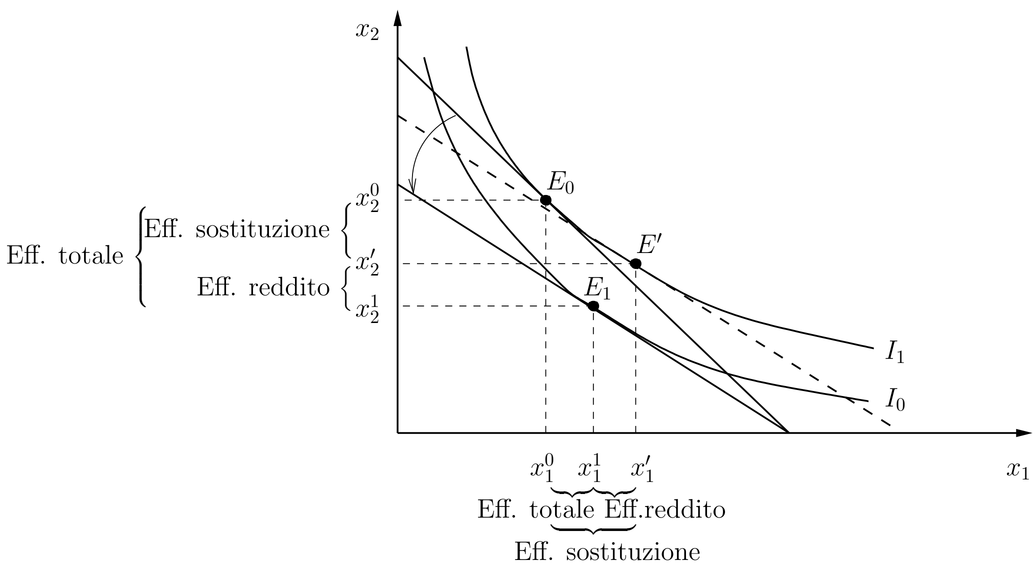
Beni di Veblen: beni per i quali l'aumento di prezzo determina un maggiore desiderio di un loro acquisto da parte dei consumatori (beni di prestigio). Una diminuzione di prezzo renderebbe tali beni meno desiderabili da parte dei consumatori facoltosi perché verrebbero percepiti come non più esclusivi.

Variazione del prezzo p_2: l'aumento esogeno del prezzo del bene 2 determina un cambiamento sia nel coefficiente angolare, sia nell'intercetta della retta vincolo di bilancio che ruota verso sinistra. Il nuovo vincolo di bilancio diviene perciò una retta più «piatta» e ciò significa che, dal punto di vista economico, si ha una compressione del vincolo di bilancio del consumatore che diventa relativamente più povero in quanto il costo di uno dei beni è aumentato; ciò determina una perdita di utilità, quindi uno spostamento su una curva di indifferenza più vicina all'origine.

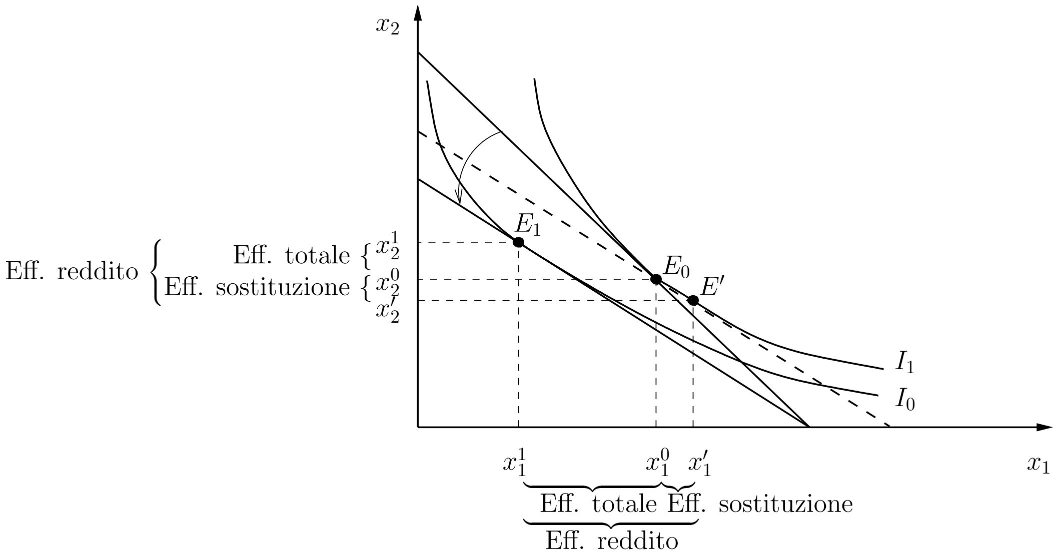
- x_1 e x_2 beni complementari ($\varepsilon_{x_1,p_2} < 0$, $x_1 \downarrow$, $x_2 \downarrow$)



- x_1 e x_2 beni sostituti ($\varepsilon_{x_1,p_2} > 0$, $x_1 \uparrow$, $x_2 \downarrow$)



- x_1 e x_2 beni di Giffen $\Rightarrow x_2 = x_2(\underset{(+)}{p_2}, p_1, Y, g, N)$



	beni x_1 e x_2:	complementari		sostituti		bene 1 di Giffen	
Effetto	descrizione	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
Sostituzione (ES)	passaggio da E_0 ad E'	+	-	+	-	+	-
Reddito (ER)	passaggio da E' ad E_1	-	-	-	-	-	+
totale (ET)	passaggio da E_0 ad E_1	-	-	+	-	-	+

Tabella riepilogativa: "Analogie matematiche"

Alla luce dell'analisi condotta finora, dal punto di vista strettamente analitico la Teoria del Consumatore si sviluppa esattamente come la Teoria della Produzione/Impresa, con l'ovvia eccezione degli assiomi che servono per rendere "sistematiche" le funzioni di utilità (Libro Palomba e Staffolani, pag. 264)

Teoria dell'Impresa	**Teoria del Consumatore**
Lato dell'offerta di beni e servizi	Lato della domanda di beni e servizi
Funzione di produzione $q = q(L, K)$ Isoquanti di produzione	Funzione di utilità $u = u(x_1, x_2)$ Curve di utilità/indifferenza
Produttività marginali (q'_L e q'_K) Legge della produttività marginale decrescente	Utilità marginali (u'_{x_1} e u'_{x_2}) Legge dell'utilità marginale decrescente
Cobb-Douglas: $q(L, K) = AL^\alpha K^\beta$ CES: $q(L, K) = A[\alpha L^\rho + \beta K^\rho]^{s/\rho}$ perfetta sostituibilità: $q(L, K) = \alpha L + \beta K$ perfetta complem.: $q(L, K) = A \min\{\alpha L, \beta K\}$	Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ CES: $u(x_1, x_2) = A[\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{s/\rho}$ perfetta sostituibilità: $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ perfetta complem.: $u(x_1, x_2) = A \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$
$\mathrm{SMST}(L, K) = \dfrac{dK}{dL} = -\dfrac{\mathrm{q}'_L}{\mathrm{q}'_K} \approx \dfrac{\partial K}{\partial L}$ $\sigma = \dfrac{\partial(K/L)}{K/L} \Big/ \dfrac{\partial\lvert\mathrm{SMST}(L, K)\rvert}{\lvert\mathrm{SMST}(L, K)\rvert}$ $= \dfrac{\partial K/L}{\partial\lvert\mathrm{SMST}(L, K)\rvert} \dfrac{\lvert\mathrm{SMST}(L, K)\rvert}{K/L}$ $= \dfrac{\partial \ln(K/L)}{\partial \ln\lvert\mathrm{SMST}(L, K)\rvert}$	$\mathrm{SMS}(x_1, x_2) = \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{\mathrm{u}'_{x_1}}{\mathrm{u}'_{x_2}} \approx \dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}$ $\sigma = \dfrac{\partial(x_2/x_1)}{x_2/x_1} \Big/ \dfrac{\partial\lvert\mathrm{SMS}(x_1, x_2)\rvert}{\lvert\mathrm{SMS}(x_1, x_2)\rvert}$ $= \dfrac{\partial x_2/x_1}{\partial\lvert\mathrm{SMS}(x_1, x_2)\rvert} \dfrac{\lvert\mathrm{SMS}(x_1, x_2)\rvert}{x_2/x_1}$ $= \dfrac{\partial \ln(x_2/x_1)}{\partial \ln\lvert\mathrm{SMS}(x_1, x_2)\rvert}$
Retta di isocosto: $\mathrm{CT} = wL + rK$	Retta vincolo di bilancio: $Y = p_1x_1 + p_2x_2$
Problema di ottimizzazione: minimizzare il costo totale sotto il vincolo di produzione $q = \bar{q}$	Problema di ottimizzazione: massimizzare l'utilità sotto il vincolo di bilancio
Condizione di equilibrio dell'impresa $\lvert\mathrm{SMST}(L, K)\rvert = \dfrac{w}{r}$ Sentiero di espansione dell'impresa	Condizione di equilibrio del consumatore $\lvert\mathrm{SMS}(x_1, x_2)\rvert = \dfrac{p_1}{p_2}$ Sentiero di espansione del consumo
Equilibrio dell'impresa: domanda condizionale di input (soluzione di tangenza) $\tilde{L} = L(w, r, \bar{q})$ e $\tilde{K} = K(w, r, \bar{q})$	Equilibrio del consumatore: domanda di beni e servizi (soluzione di tangenza) $x_1^* = x_1(p_1, p_2, Y)$ e $x_2^* = x_2(p_1, p_2, Y)$
Equilibrio dell'impresa: soluzioni d'angolo $L^* = \mathrm{CT}/w$ e $K^* = 0$ oppure $L^* = 0$ e $K^* = \mathrm{CT}/r$	Equilibrio del consumatore: soluzioni d'angolo $x_1^* = Y/p_1$ e $x_2^* = 0$ oppure $x_1^* = 0$ oppure $x_2^* = Y/p_2$
Effetto di sostituzione (ES) Effetto output (EO) Effetto totale (ET)	Effetto di sostituzione (ES) Effetto reddito (ER) Effetto totale (ET)
non ci sono fattori produttivi la cui domanda aumenta se aumenta il prezzo	ci sono i beni di Giffen/Veblen la cui domanda aumenta se aumenta il prezzo

Misure di benessere individuale

1. Utilità indiretta

Una volta che il consumatore ha raggiunto il suo equilibrio attraverso

(a) l'uguaglianza $\mathrm{SMS}(x_1, x_2) = \dfrac{p_1}{p_2}$ oppure

(b) attraverso una soluzione d'angolo,

è possibile determinare le funzioni di domanda $x_1^* = x_1^*(p_1, p_2, Y)$ e $x_2^* = x_2^*(p_2, p_1, Y)$ che permettono la massimizzazione dell'utilità. L'**utilità indiretta** corrisponde al massimo benessere che il consumatore è in grado di ottenere dalle proprie scelte, quindi è data dalla relazione

$$\begin{aligned} u(x_1^*, x_2^*) &= \tilde{u}[x_1^*(p_1, p_2, Y), x_2^*(p_2, p_1, Y)] \\ &= \tilde{u}(p_1, p_2, Y). \end{aligned}$$

$$\text{Utilità indiretta} \begin{array}{l} \nearrow \ \text{relazione diretta rispetto al reddito } Y \\ \\ \searrow \ \text{relazione inversa rispetto ai prezzi } p_1 \text{ e } p_2 \end{array}$$

Esempio: Variazione compensativa del reddito

Ipotesi:

1. aumento del prezzo p_1,
2. lo Stato interviene per salvaguardare il potere di acquisto. Possibili manovre sono:
   - diminuzione dell'imposizione fiscale ($\tau \downarrow$),
   - aumento spesa pubblica ($G \uparrow$),
   - sostegno ai lavoratori (ad esempio, aumento salariale $w \uparrow$).
3. lo Stato conosce le curve di indifferenza di ogni consumatore.

Di quanto deve aumentare il reddito disponibile (ΔY) affinché il benessere del consumatore resti inalterato?

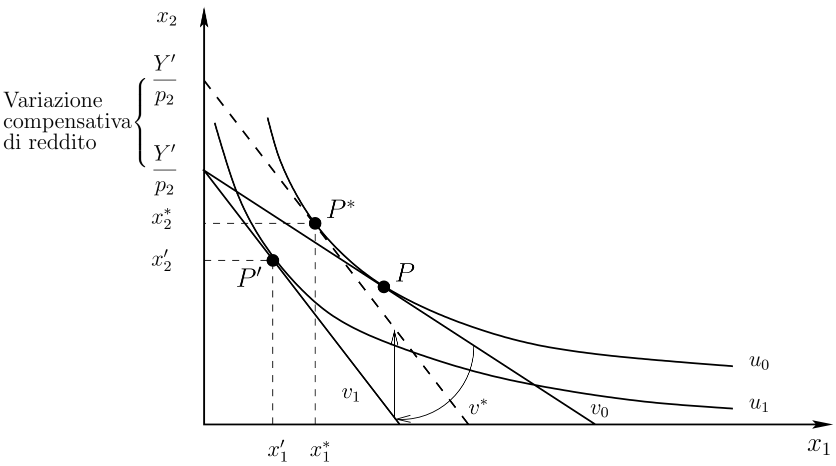


Grafico:

L'equilibrio iniziale del consumatore corrisponde al paniere P. A seguito di un aumento del prezzo p_1 il vincolo di bilancio si comprime ruotando a sinistra e porta l'equilibrio nel paniere P'. A questo punto lo Stato decide di intervenire abbassando la pressione fiscale, determinando quindi un innalzamento del reddito del consumatore (spostamento parallelo verso l'alto del vincolo di bilancio). L'equilibrio finale è ottenuto perciò in P^* in corrispondenza del quale l'utilità del consumatore è la stessa che egli otteneva nell'equilibrio iniziale E_0.

Soluzione:

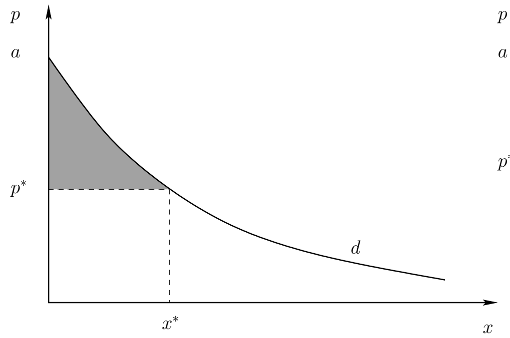
$$\tilde{u}(p_1, p_2, Y) = \tilde{u}(p_1 + \Delta p_1, p_2, Y + \Delta Y),$$

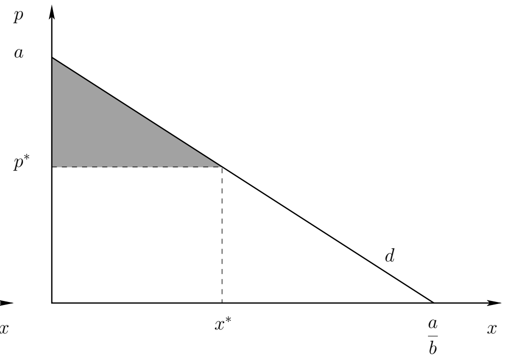
dove $\Delta p_1 > 0$ e $\Delta Y > 0$.

26 Surplus del consumatore, Consumo-tempo libero - gio 03/04/2025

2. Surplus del consumatore

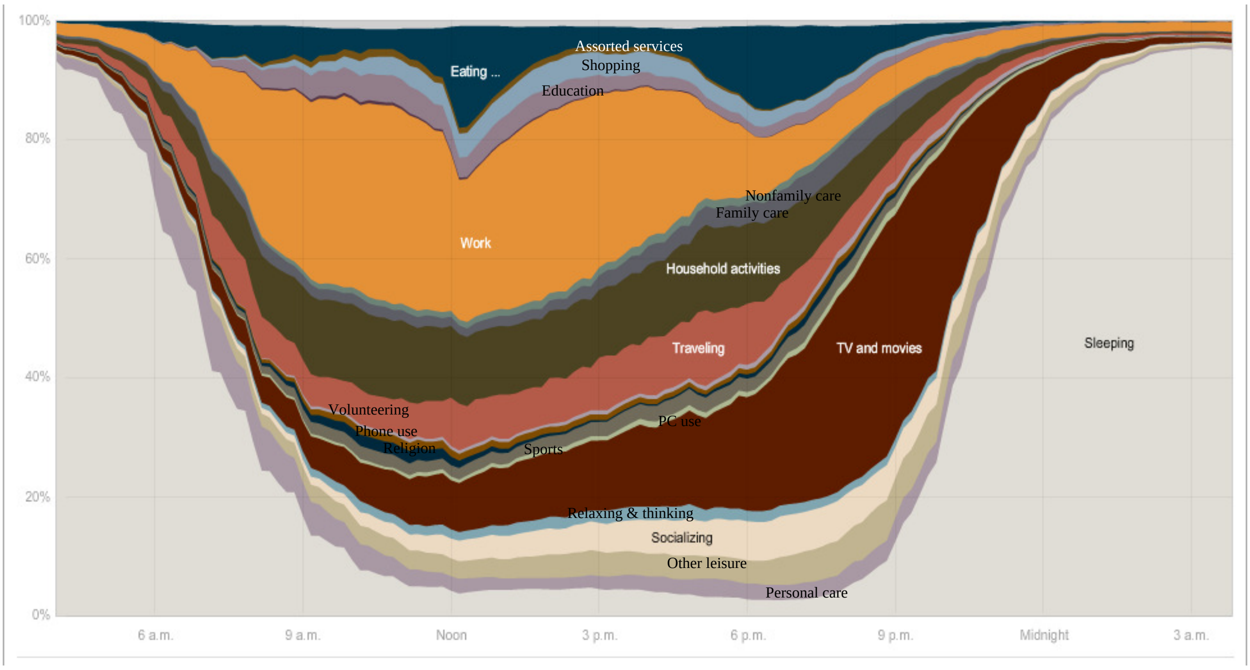
Il surplus (o rendita) del consumatore (SC) è definito come la differenza tra la spesa che il consumatore sarebbe stato disposto a sostenere per acquistare un certo bene e la spesa che effettivamente sostiene acquistandolo sul mercato.





Consumo-tempo libero

1. Introduzione: "How Different Groups Spend Their Day"



Fonte: `http://www.nytimes.com/interactive/2009/07/31/business/20080801-metrics-graphic.html?_r=2&`

2. Scelta consumo-tempo libero

Ipotesi:

1. l'unico input variabile è il lavoro (L),
2. razionalità dell'individuo-lavoratore:
   - a parità di salario (w) sceglie l'impiego con meno ore-lavoro,
   - a parità di ore-lavoro (L) sceglie l'impiego con il maggiore salario (w),
3. l'individuo-lavoratore consuma la quantità costante $C = px$, dove x rappresenta il generico bene di consumo o **bene composito**, mentre p è il prezzo unitario.

Date queste ipotesi, si ottiene la Curva dei Consumi che può essere espressa in due modi:

(a) $m = C \leq w(1-\tau)(T-\ell) + V$ (scelta reddito-tempo libero o consumo-tempo libero),

(b) $x \leq \dfrac{w(1-\tau)(T-\ell)+V}{p}$ (scelta bene composito-tempo libero),

dove m è il reddito effetivo che consumatore il consumatore spenderà interamente per il consumo (quindi $m \equiv C = px$), T è il tempo totale a disposizione (ad esempio nell'arco di una giornata di lavoro $T = 24$ ore), τ è l'importo delle tasse che l'individuo paga, V rappresenta i redditi non derivanti da lavoro, ℓ è il tempo libero (*leisure*) giornaliero.
D'ora in avanti si ipotizza per semplicità $\tau = 0$ (assenza d imposizione fiscale da parte dello Stato), quindi il vincolo di bilancio è dato dalla retta

$$\begin{cases} m = w(T-\ell) + V & \text{scelta tempo libero-reddito/consumo} \\ m = \dfrac{w}{p}(T-\ell) + V & \text{scelta tempo libero-bene composito} \end{cases}$$

ed indica come diminuiscono i consumi all'aumentare del tempo libero (ℓ).
Casi limite:

- se $\ell = T \Rightarrow h = T - \ell = 0$: il lavoratore è disoccupato, non percepisce salario e consuma $C \equiv m \leq V$;

- se $\ell = 0 \Rightarrow h = T$: il lavoratore non ha tempo libero e percepisce il salario massimo (in assenza di tassazione pari al reddito potenziale) e consuma perciò

$$C \equiv m = px \leq wT + V,$$

dove h è l'ammontare di lavoro offerto dall'individuo.
Il valore $\ell = T$ rappresenta il valore massimo del tempo libero, in corrispondenza del quale la Curva dei Consumi assume valore $C = m = V$ oppure, analogamente, $x = V/p$.

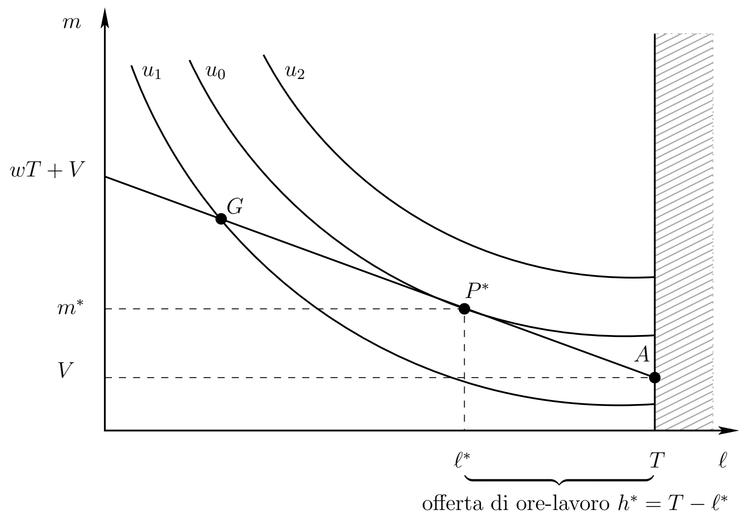


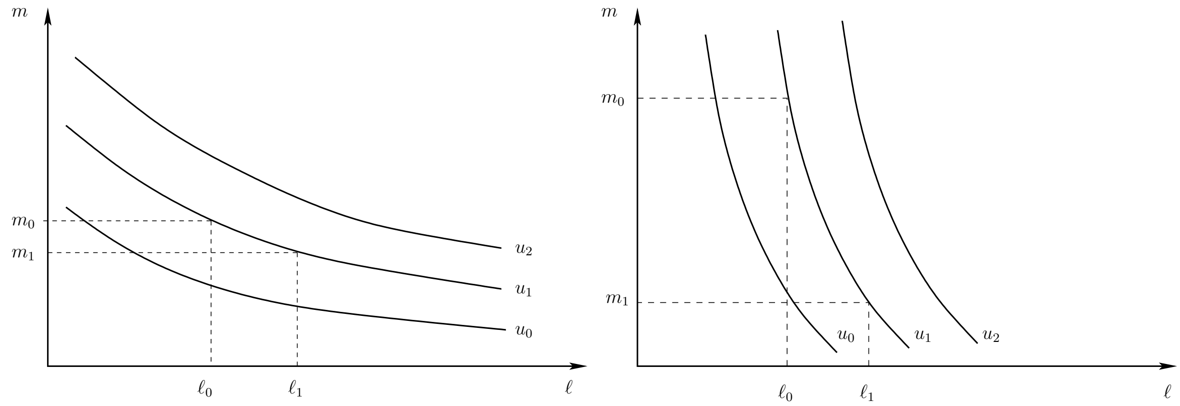
Grafico:

Nel grafico l'asse delle ordinate è intestato al reddito effettivo (m) perché qualsiasi ammontare del consumo corrisponde ad una spesa, quindi ad un reddito che deve essere impegato per effettuare tale spesa.
Il paniere P^* rappresenta il punto di equilibrio del consumatore, il paniere A corriaponde alla scelta (estrema) di utilizzare tutto il tempo a propria disposizione come tempo libero percependo il solo reddito non da lavoro V.
La differenza $h^* = T - \ell^*$ costituisce l'offerta di ore-lavoro da parte dell'individuo.

Curve di utilità/indifferenza: curve di livello della funzione di utilità $u(\ell, m)$, quindi rappresentano tutte le possibili combinazioni domanda del reddito (m) e del tempo libero (ℓ) che danno luogo allo stesso livello di utiltità per l'individuo.

Curve di utilità/indifferenza

(a) lavoratore ≪consumista≫ **(b) lavoratore ≪pigro≫**



La combinazione ottimale tra domanda di x e ℓ è ottenuta in corrispondenza

- del punto di tangenza tra Curva dei Consumi e Curva di indifferenza più alta possibile, cioè quando vale l'uguaglianza

$$\mathrm{SMS}(\ell, m) = w \qquad \text{(il "prezzo" del consumo/reddito è unitario),}$$

  dove $\mathrm{SMS}(\ell, m) = \dfrac{\partial u(\ell, m)}{\partial \ell} \Big/ \dfrac{\partial u(\ell, m)}{\partial m}$ rappresenta il **Saggio Marginale di Sostituzione**;

- delle soluzioni d'angolo, quando

$$\mathrm{SMS}(\ell, m) \gtrless w \qquad \text{oppure} \qquad \mathrm{SMS}(\ell, x) \gtrless \frac{w}{p},$$

3. Statica comparata: offerta di lavoro

Spostamento della Curva dei Consumi
$\nearrow$ rotazione ($w \uparrow$, $p \downarrow$ oppure $\tau \downarrow$ se $\tau \neq 0$)
$\searrow$ spostamento parallelo ($V \uparrow$)

(b) Spostamento parallelo: l'aumento del reddito non derivante da lavoro ($V \uparrow$) determina un aumento dell'intercetta della curva dei consumi che si sposta parallelamente a destra. A parità di tempo libero, l'individuo è più ricco e può aumentare i consumi.

[Grafici simili a quelli di pag. 89-90]

(a) Rotazione: l'aumento del salario ($w \uparrow$) oppure la diminuzione del livello dei prezzi ($p \downarrow$) o dell'imposizione fiscale da parte dello Stato ($\tau \downarrow$) determinano un aumento della pendenza e dell'intercetta della curva dei consumi che perciò ruota verso l'alto. In tutti i casi l'individuo è più ricco perché, a parità di tempo libero:

- se $w \uparrow$ percepisce una maggiore remunerazione,
- se $p \downarrow$ vede aumentare il proprio potere d'acquisto (solo nel caso di scelta tra tempo libero e bene composito),
- se $\tau \downarrow$ ha più risorse da destinare al consumo.

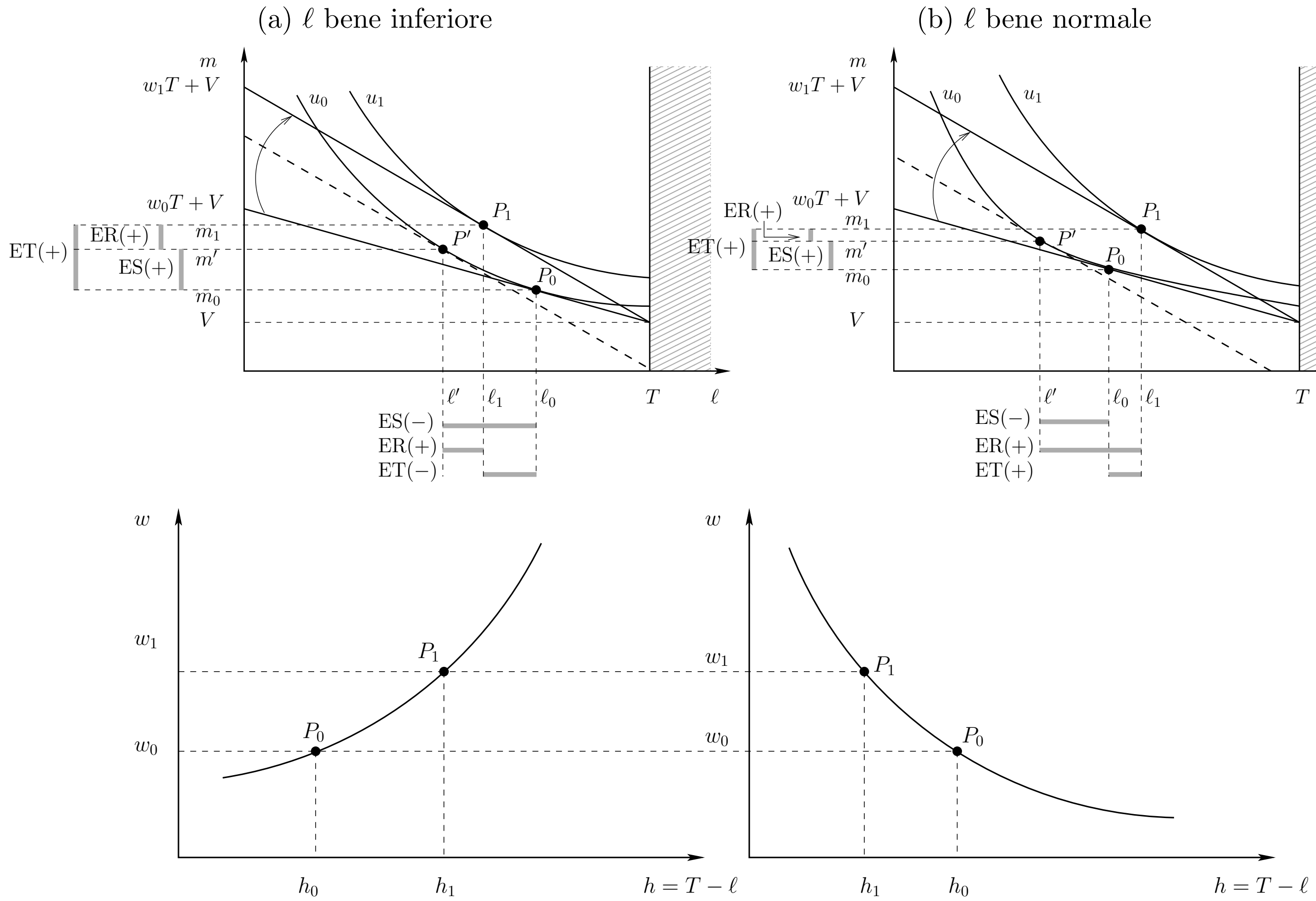


Grafico:

Nei due grafici in alto è rappresentata la tipica analisi di statica comparata: l'equilibrio iniziale dell'impresa è nel paniere P_0 in corrispondenza del quale c'è tangenza tra la curva di utilità/indifferenza u_0 e la Curva dei Consumi è quella più "piatta". Quando $w\uparrow$, $p\downarrow$ (oppure $\tau\downarrow$), il soggetto-lavoratore è più ricco, quindi può permettersi un aumento dei consumi e si sposta nel paniere P' sulla linea tratteggiata; in realtà la curva iniziale dei Consumi ruota poiché aumentano sia il coefficiente angolare, sia l'intercetta e si assesta sulla nuova Curva dei Consumi più inclinata. Il nuovo punto di tangenza si determina in P_1 che giace sulla curva di utilità/indifferenza u_1: il soggetto perciò incrementa il suo tempo libero quando ℓ è bene normale (vale $0<\varepsilon_{\ell,m}<1$, si veda in proposito pag. 80), mentre riduce il tempo libero, nel caso ℓ sia bene inferiore ($\varepsilon_{\ell,m}<0$).
Nei due grafici in basso è rappresentata la funzione di offerta di lavoro che scaturisce dai grafici in alto: nel primo caso un aumento del salario ($w\uparrow$) produce una diminuzione del tempo libero, quindi l'individuo decide di aumentare le ore-lavoro ($\ell\downarrow$, quindi $h^*\uparrow$). In questo caso l'andamento della curva di offerta è quello standard, cioè non decrescente.
Nel secondo caso un aumento del salario ($w\uparrow$) produce la reazione opposta nell'individuo perché egli potrebbe addirittura incrementare il proprio tempo libero (tipicamente un soggetto pigro/benestante), quindi in questo caso si avrebbe una diminuzione delle ore-lavoro ($\ell\uparrow$, quindi $h^*\downarrow$).
La funzione di offerta di lavoro del singolo individuo non ha perciò un andamento predefinito e può essere sia crescente, sia decrescente. Infine, nel caso particolare in risulti $\ell_0=\ell_1$, la curva h^* sarebbe perfettamente rigida.

	bene ℓ:	normale		inferiore	
Effetto	descrizione	ℓ	m	ℓ	m
Sostituzione (ES)	passaggio da E_0 ad E'	-	+	-	+
Reddito (ER)	passaggio da E' ad E_1	+	+	+	+
totale (ET)	passaggio da E_0 ad E_1	+	+	-	+

Effetto sostituzione: movimento lungo la stessa curva di indifferenza u_0 determinato dalla variazione nei prezzi relativi w e p. La rinuncia a parte del tempo libero ($\ell\downarrow$) consente maggiori livelli di consumo ($m\uparrow$) per l'individuo;

Effetto reddito: spostamento verso la curva di indifferenza più alta u_1, in quanto l'individuo effettivamente è ≪più ricco≫ : il livello di consumo naturalmente aumenta ($m \uparrow$), ma la decisione sul tempo libero dipende da come il lavoratore percepisce il tempo libero: alcuni soggetti (≪benestanti≫ e/o ≪non avidi≫) massimizzano la propria utilità aumentando il tempo libero ($\ell \uparrow$), mentre altri (≪bisognosi≫ e/o ≪avidi≫) decidono di aumentare la loro attività lavorativa ($\ell \downarrow$).

Dal punto di vista dell'offerta di lavoro risulta:

- se l'effetto sostituzione domina l'effetto reddito, si riduce la domanda di tempo libero ($\ell \downarrow$) ed aumenta l'offerta di lavoro ($h^* \uparrow$): questo è il caso del soggetto ≪bisognoso≫ con salario basso oppure del soggetto ≪avido≫ se il salario è elevato;

- se l'effetto reddito domina l'effetto sostituzione: aumenta la domanda di tempo libero ($\ell \uparrow$) e diminuisce l'offerta di lavoro ($h^* \downarrow$): questo è il caso del soggetto ≪benestante≫ con salario elevato oppure del soggetto ≪non avido≫ se il salario è basso.

27 Salario di riserva, Scelte intertemporali - gio 03/04/2025

4. Salario di riserva

Ipotesi:

1. l'individuo lavoratore può scegliere di non lavorare ($\ell = T$) oppure di lavorare per un tempo prefissato ($\ell^* = T - h^*$);
2. si utilizza la funzione di utilità è $u(\ell, x)$;
3. la soluzione $\ell^* = T - h^*$ rappresenta la combinazione ottima tra domanda del bene x e tempo libero (tangenza tra Curva dei Consumi e curva di indifferenza). In questo caso l'individuo sicuramente sceglierebbe di lavorare;
4. la soluzione $\ell = T$ ($L = 0$) corrisponde alla soluzione d'angolo. Se fosse così l'individuo sicuramente sceglierebbe di non lavorare.

Quando l'individuo sceglie di offrire di lavoro?

- se $\ell = \ell^* = T - h^* \quad \Rightarrow \quad u(\ell, m) = u(\ell^*, m^*) = u(T - h^*, wh^* + V)$ dipende positivamente da w,
- se $\ell = T \quad \Rightarrow \quad u(\ell, m) = u(T, V)$ indipendente da w.

Generalizzando, il **salario di riserva** (w_0) che garantisce l'uguaglianza tra le utilità indirette

$$u(T - h^*, w_0 h^* + V) = u(T, V)$$

rappresenta il valore critico: se $w > w_0$ l'individuo preferisce lavorare, mentre resta inattivo se $w < w_0$.

N.B.$\rightarrow$ Se si tratta di scelte tra tempo libero e bene composito vale

$$u(\ell, x) = u(x, T) \qquad \Rightarrow \qquad u\left(T - h^*, \frac{w}{p}h^* + \frac{V}{p}\right) = u\left(T, \frac{V}{p}\right).$$

Scelte intertemporali di consumo

Ipotesi:

1. il consumatore deve effettuare le proprie scelte in 2 periodi differenti (periodo 1 e periodo 2),
2. al termine del periodo 2 il consumatore muore e non lascia eredità,
3. il consumatore possiede un **reddito effettivo** m_1 nel periodo 1 ed un reddito m_2 nel periodo 2,
4. i consumi ammontano a $C_1 = p_1 x_1$ nel periodo 1 e a $C_2 = p_2 x_2$ nel periodo 2, dove x_1 e x_2 rappresentano un bene composito.

Scelta intertemporale:

- **Risparmio** ($S = m_1 - C_1 > 0$): il consumatore effettua una scelta intertemporale decidendo di non consumare tutto il reddito nel periodo 1 in modo da poter consumare di più nel periodo 2;
- **Teoria del Consumatore "standard"** ($C_1 = m_1$ e $C_2 = m_2$): quindi il consumatore non effettua nessuna scelta intertemporale;

- **Indebitamento** ($S = m_1 - C_1 < 0$): il consumatore effettua una scelta intertemporale decidendo di consumare per un ammontare maggiore del reddito effettivo nel periodo 1, quindi decide di accedere ad un qualche finanziamento.

$$\begin{cases} S = m_1 - C_1 & \text{Risparmio nel periodo 1} \\ C_2 = m_2 + S(1+r) & \text{Consumo nel periodo 2} \end{cases}$$

dove r è il tasso di interesse applicato dalle banche sui depositi e/o sui prestiti.

$$S(1+r) \begin{array}{l} \nearrow \; > 0\text{: reddito derivato da risparmio} \\ \searrow \; < 0\text{: somma da restituire ai creditori} \end{array}$$

Vincolo di bilancio intertemporale: relazione tra consumo odierno e consumo futuro data dalla relazione

$$\begin{aligned} C_2 &= m_2 + S(1+r) \\ &= m_2 + (m_1 - C_1)(1+r) \\ &= m_2 + (1+r)m_1 - (1+r)C_1 \end{aligned}$$

Proprietà:

(a) il vincolo di bilancio intertemporale è lineare;

(b) coeff. angolare: $-(1+r) \Rightarrow$ relazione inversa tra C_1 e C_2;

(c) l'intercetta è data dalla somma del reddito futuro più il **valore capitalizzato** del reddito corrente, cioè $m_2 + (1+r)m_1$;

(d) il valore massimo per C_1 è dato dalla somma del reddito più il **valore attuale** del reddito futuro, cioè $m_1 + \dfrac{m_2}{1+r}$;

(e) il paniere nel quale il consumatore non risparmia e non si indebita appartiene necessariamente alla retta. Esso è dato da $A(m_1, m_2)$.

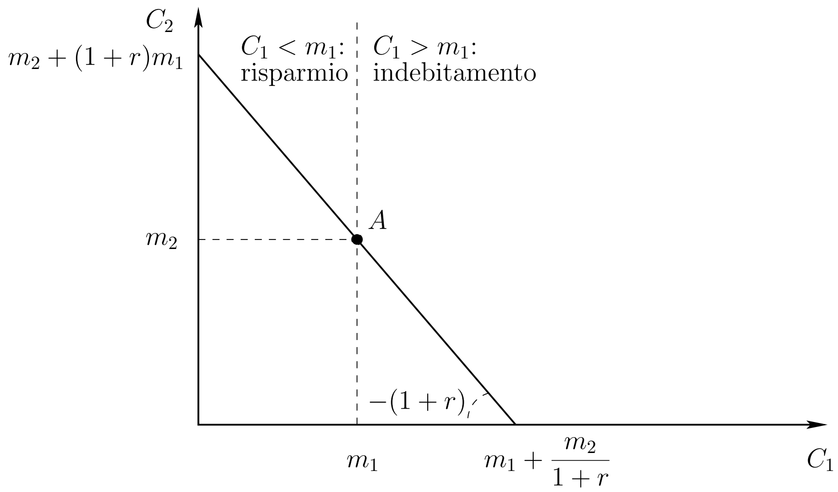


Grafico:

Tutti i panieri appartenenti alla retta vincolo di bilancio intertemporale che sono alla sinistra del punto A evidenziano un livello di consumo $C_1 < m_1$, quindi c'è un risparmio positivo ($S > 0$) e la possibilità di avere un consumo nel periodo 2 pari a $C_2 > m_2$. Per tutti i panieri posti alla destra di A vale esattamente il ragionamento opposto.