Forme funzionali in microeconomia

Giulio Palomba

Lezioni per il Dottorato di Ricerca in Economia Politica
Università Politecnica delle Marche
Dipartimento di Scienze Economiche e Sociali (DISES)

Febbraio 2014

Indice

Introduzione

In microeconomia le forme funzionali vengono spesso utilizzate per descrivere dal punto di vista analitico l'attività di produzione effettuata da una generica impresa; il loro largo impiego in letteratura, sia dal punto di vista teorico, sia dal punto di vista applicato, è dovuto al fatto che esse costituiscono un adeguato strumento analitico per analizzare la relazione esistente tra le combinazioni di fattori produttivi (ad esempio, lavoro, capitale, materie prime) impiegati nei processi di produzione ed i livelli di produzione realizzati. In termini più specifici, esse vengono utilizzate per descrivere sia le funzioni di produzione, sia le funzioni di costo.

Questo lavoro si pone perciò l'obiettivo di definire le principali funzioni e di mostrare le loro caratteristiche più importanti riguardo agli aspetti matematici ed economici.

Le pagine che seguono sono composte di tre sezioni. La sezione 1 introduce il concetto di tecnologia utilizzato in microeconomia con particolare enfasi sui concetti matematici che sono alla base della sua definizione. In quast'ambito perciò vengono introdotti gli importanti concetti di funzione di produzione, Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica (SMST) e di elasticità di sostituzione. La sezione 2 si occupa invece dei meccanismi di ottimizzazione necessari per raggiungere l'obiettivo di massimo profitto; in questo contesto vengono perciò introdotte le funzioni di costo per l'impresa. Le forme funzionali costituiscono l'oggetto della sezione 3 all'interno della quale si effettua la distinzione tra forme rigide e flessibili. Un'appendice contenente alcuni risultati utilizzati nelle dimostrazioni contenute nelle diverse sezioni chiude il lavoro.

La comprensione del testo non prescinde dalla conoscenza dei concetti base della microeconomia, della matematica a più dimensioni, nonché di algebra delle matrici; per quanto riguarda questi ultimi, alcune nozioni utili sono contenute all'interno di un'Appendice tecnica che chiude questo lavoro. Infine, dal punto di vista della notazione, tutte le matrici (quindi anche i vettori) saranno evidenziati attraverso la scrittura in **grassetto** per distinguerle dai numeri scalari per il quale è utilizzato il normale standard matematico ($corsivo$).

1 La tecnologia

Nella teoria economica la quantità di bene e/o servizio offerta da un'impresa (Q^s) è generalmente rappresentata attraverso la funzione

$$Q^s = Q^s(p, \mathbf{w}, T^*, N), \tag{1}$$

dove, oltre alla variabile **endogena** data prezzo di vendita del prodotto (p), entrano in gioco le seguenti variabili **esogene**:

- il costo dei fattori produttivi, definito dal vettore $\mathbf{w}$, in quanto un aumento del prezzo dei fattori dovrebbe avere un impatto negativo sulla produzione;
- lo stato della tecnologia, indicata con T^* poiché un miglioramento tecnologico dovrebbe produrre effetti positivi sull'offerta;
- il numero di imprese che producono il bene scambiato nel mercato, indicato con N infatti, all'aumentare del numero di imprese presenti sul mercato, la quantità offerta aumenta.

In questo contesto l'impresa è vista sostanzialmente come un contenitore (o "scatola nera") nel quale sono immessi i fattori produttivi e da cui escono i prodotti finiti. La tecnologia si configura perciò come un mero processo di trasformazione degli input in output ed è perciò assunta come data/esogena; dal punto di vista analitico la tecnologia è rappresentata attraverso opportune forme funzionali che saranno introdotte nelle pagine successive.

1.1 Definizioni di base

1.1.1 Input ed output

In un dato periodo di tempo l'impresa produce una quantità di output, o prodotto finito, indicata dallo scalare y; per ipotesi si considerano solo imprese **monoprodotto**. L'impresa impiega all'interno del processo di produzione un insieme di input, o fattori produttivi, che vengono indicati attraverso le n componenti del vettore $\mathbf{x}$. Gli input costituiscono i flussi in ingresso nel processo di produzione, in quanto vengono misurati in ore di utilizzo all'interno di in un certo periodo di tempo.

Per definizione, y e tutte le componenti di $\mathbf{x}$ devono avere valori positivi, quindi risulta:

$$y \in \mathbb{R}_+ \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2}$$

Tutte le coppie $(\mathbf{x}, y)$ teoricamente possibili costituiscono l'**insieme dei piani di produzione**, quindi dalla (2) segue immediatamente che $(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$.

1.1.2 Insieme delle possibilità di produzione

L'insieme dei piani di produzione può essere vincolato dalla natura della tecnologia, dalle caratteristiche e dalla disponibilità dei fattori, da restrizioni istituzionali fino a comprendere tutte quelle combinazioni input-output effettivamente realizzabili: si definisce pertanto come insieme delle possibilità di produzione il sottoinsieme in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, ovvero a lista di output ed input

$$Y = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ | y \leq f(\mathbf{x})\}, \tag{3}$$

dove $f(\mathbf{x})$ rappresenta la funzione di produzione.

1.1.3 Funzione di produzione

La funzione di produzione $f(\mathbf{x})$ è trasformazione del tipo

$$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Il vincolo nella (3) stabilisce l'appartenenza all'insieme Y di tutte quelle combinazioni per le quali la quantità di output prodotto non può superare quella stabilita dalla funzione di produzione per una data quantità di fattori produttivi. In questo senso la funzione di produzione costituisce l'insieme dei punti di frontiera oppure, in altri termini

$$f(\mathbf{x}) = \{y \text{ è il massimo output ottenibile associato a } (\mathbf{x}, y) \in Y\}. \tag{5}$$

Ovviamente, la trasformazione degli input in output deve essere tecnicamente possibile.[1]

Diewert (1982) introduce le proprietà della funzione di produzione:

1. la funzione $f(\mathbf{x})$ deve essere continua nello spazio $\mathbb{R}_+$ quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette almeno un punto di massimo o di minimo relativo;

2. La funzione di produzione è monotòna crescente; presi due generici vettori $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ deve risultare che
$$\text{se } \mathbf{x_1} > \mathbf{x_2} \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x_1}) > f(\mathbf{x_2});$$

3. produttività marginale rispetto all'input i-esimo è
$$f_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \geq 0 \tag{6}$$
per $\forall\ i$;

[1] Se si pongono delle restrizioni sull'insieme delle possibilità produttive, in particolare se si suppone che alcuni input siano disponibili in quantità fissa, si ottiene l'insieme delle possibilità produttive di breve periodo.

4. concavità
$$f_{ii} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} \leq 0 \tag{7}$$
per $\forall\ i$;

5. legge della produttività marginale decrescente
$$\lim_{x_i \to \infty} f_i = 0; \tag{8}$$

6. analogamente risulta
$$0 \leq \lim_{x_i \to \infty} \varepsilon_{y,x_i} \leq 1, \tag{9}$$
dove ε_{y,x_i} è l'elasticità dell'output rispetto all'i-esimo input
$$\varepsilon_{y,x_i} = \frac{\dfrac{\partial y}{y}}{\dfrac{\partial x_i}{x_i}} = \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{x_i}{y} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln x_i}. \tag{10}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

L'elasticità dell'output rispetto all'input i-esimo può essere scritta come segue
$$\varepsilon_{y,x_i} = \frac{f_i}{\bar{f}_i},$$
dove $\bar{f}_i$ è la produttività media rispetto all'input i-esimo. È perciò ovvio che, per un utilizzo del fattore $x_i \to \infty$, risulti $f_i \leq \bar{f}_i$, quindi $0 \leq \lim_{x_i \to \infty} \varepsilon_{y,x_i} \leq 1$. Questo risultato sfrutta la relazione neoclassica in base alla quale la curva della produttività marginale interseca quella della produttività media in corrispondenza del punto di massimo.

1.1.4 Insieme degli input necessari

Analogamente è possibile definire l'insieme degli input necessari, cioè una lista di fattori produttivi necessari per produrre una almeno certa quantità di output (tutte le possibili combinazioni degli input che sono in grado di generare y). Per essere tecnologicamente fattibile, occorre che $(\mathbf{x}, y) \in Y$. Esso è pertanto definito da
$$V(y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | (\mathbf{x}, y) \in Y\}. \tag{11}$$
All'interno di questa equazione sono considerate tutte le combinazioni di input che devono essere possibili, ma possono essere efficienti oppure inefficienti.[2]

1.1.5 Isoquanto di produzione

L'insieme di tutte le combinazioni efficienti prende il nome di isoquanto di produzione ed è dato dalla seguente espressione:
$$Q(y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ | \mathbf{x} \in V(y), \mathbf{x} \notin V(y^*) \text{ per } \forall y^* > y\}. \tag{12}$$

In pratica, l'isoquanto è una lista di variabili che permette di produrre precisamente la quantità y. Gli insiemi Y e $V(y)$ riassumono da due diversi punti di vista tra loro strettamente connessi la struttura della tecnologia.

[2]Una combinazione di input è detta tecnologicamente efficiente se l'output prodotto corrisponde a quello massimo ottenibile attraverso il suo utilizzo. In simboli si ha una tecnologia efficiente se:
$$\nexists y^* \in Y | y^* > y$$

1.2 Assiomi

Per poter rendere compatibili gli insiemi finora definiti alle esigenze della teoria economica sono stati introdotti i seguenti assiomi di comportamento:

1. l'insieme delle possibilità di produzione non può essere vuoto ($Y = \varnothing$) in quanto deve sempre esistere una tecnologia che permette la produzione di qualsiasi livello di output;
2. L'insieme Y è chiuso, infatti i punti per i quali $y = f(\mathbf{x})$ fanno parte dell'insieme stesso;
3. Quantità positive di output scaturiscono solo dall'impiego di quantità positive di input, in simboli

$$y > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i \in [1, n] \mid x_i > 0$$

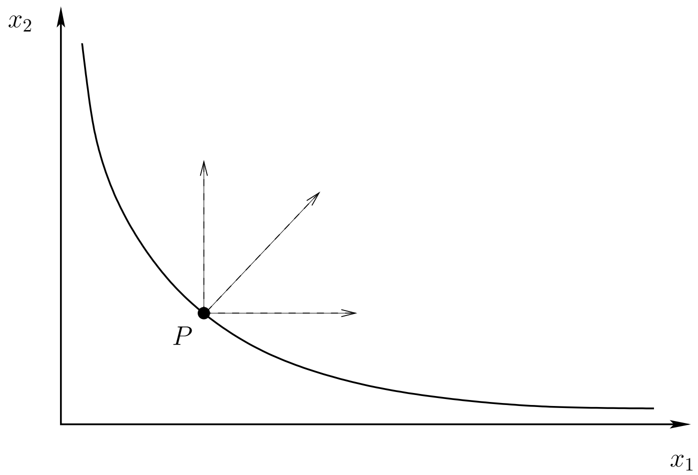
Anche per l'insieme degli input necessari $V(y)$ esistono alcuni assiomi che vanno ad integrarsi con quelli di cui sopra. In particolare risulta che

1. L'insieme $V(y)$ è regolare[3] cioè risulta essere non vuoto, chiuso e contiene $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ per $\forall\ y \geq 0$;
2. L'insieme $V(y)$ è monotòno cioè se da un vettore $\mathbf{x}$ è possibile ricavare la quantità di output y, la stessa quantità è ottenibile anche per qualsiasi vettore $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{x}$. In formule si ha:

$$\text{se } \mathbf{x} \in V(y) \Rightarrow \mathbf{x}^* \in V(y) \text{ per } \mathbf{x}^* \geq \mathbf{x}$$

Graficamente tale concetto è evidenziato in Figura 1 per il caso in cui nel processo di produzione entrano due soli input; considerando un generico punto P incluso in $V(y)$ deve risultare che tutti i punti appartenenti allo stesso insieme devono trovarsi nel semipiano a destra dell'isoquanto. Ciò implica un'inclinazione non positiva dell'isoquanto.

Figura 1: Monotònicità di $V(y)$



3. L'insieme $V(y)$ è convesso, quindi i saggi marginali di sostituzione[4] sono non crescenti.[5] Considerando due vettori $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in V(y)$ contenenti gli input, la convessità dell'insieme è garantita dal fatto che qualsiasi loro combinazione lineare fa parte dell'insieme degli input necessari. Analiticamente risulta perciò

$$\text{se } \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in V(y) \ \Rightarrow \ \bar{\mathbf{x}} = \theta \mathbf{x_1} + (1-\theta)\mathbf{x_2} \in V(y) \text{ per } \forall\ \theta \in [0, 1].$$

[3]Varian (1992) identifica tale assioma col nome di "tecnologia regolare".

[4]Il saggio marginale di sostituzione, o SMST, è definito nella sezione 1.3.1.

[5]Questa proprietà deriva dalla monotònicità di $V(y)$. Nel caso in cui tale insieme sia strettamente convesso, i saggi marginali di sostituzione sono sempre negativi.

La convessità dell'insieme degli input necessari è implicata dal fatto che anche l'insieme delle possibilità di produzione è convesso, infatti, presi due vettori $\mathbf{x_2} > \mathbf{x_1}$ in grado di poter produrre la quantità di output y, risulta

$$\text{se } (\mathbf{x_1}, y), (\mathbf{x_2}, y) \in Y \;\Rightarrow\; (\bar{\mathbf{x}}, y) \in Y,$$

dove $\bar{\mathbf{x}}$ è una qualsiasi combinazione lineare dei vettori degli input considerati;

4. la convessità dell'insieme $V(y)$ implica che la funzione di produzione sia quasi concava (Cardani, 1988).

Dimostrazione:

La rappresentazione di cui alla (5) implica che

$$V(y) = \{\mathbf{x} | y \leq f(\mathbf{x})\}$$

che coincide con la definizione formale di quasi concavità della funzione di produzione.

Esempio 1 *La Figura 2 illustra tutti i concetti esposti finora rappresentando 3 tecniche di produzione alternative che utilizzano $n = 2$ input per produrre la quantità di output $y = 1$: la tecnica 1, la tecnica 2 e la tecnica 3 per le quali l'insieme delle possibilità produttive è dato da $Y = \{(1, x_{1,1}, x_{2,1}), (1, x_{1,2}, x_{2,2}), (1, x_{1,3}, x_{2,3})\}$, mentre l'insieme degli input necessari è*

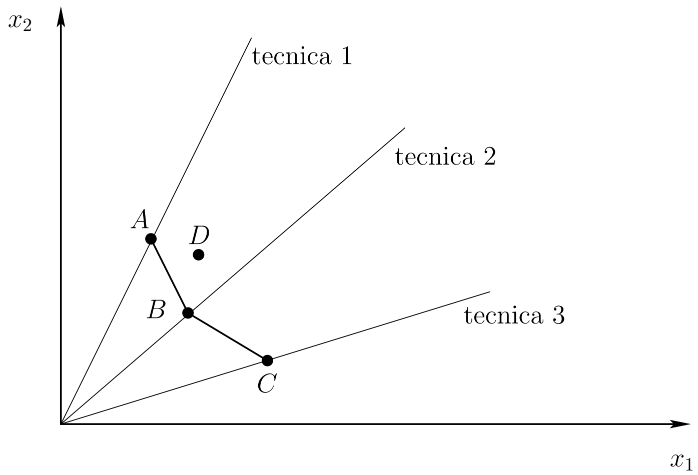
$$V(1) = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \end{bmatrix} \right\}$$

Generalizzando per un livello di produzione $y = y_0$ si ottiene

$$V(y_0) = \{\phi y_0 \mathbf{x_1}, (1-\phi)\psi y_0 \mathbf{x_2}, (1-\psi) y_0 \mathbf{x_3}\}$$

dove $\phi = 0, \frac{1}{y_0}, \frac{2}{y_0} \ldots, 1$ e $\psi = 0, \frac{1}{y_0}, \frac{2}{y_0} \ldots, 1$ sono i parametri che combinano linearmente le tecniche nei punti che costituiscono i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. La spezzata in grassetto indica perciò l'isoquanto di produzione per un livello di produzione $y = y_0$.

Figura 2: Tecnologia, isoquanto di produzione



Il punto D non è raggiungible con nessuna tecnica e neppure attraverso una combinazione di tecniche, quindi $\mathbf{x^D} \notin V(y_0)$.

1.3 Elasticità di sostituzione

L'elasticità di sostituzione è un indicatore sintetico utilizzato in Economia per misurare il grado di sostituibilità diversi input all'interno di un processo produttivo. In letteratura esistono due tipi diversi di elasticità di sostituzione a seconda del numero di input che entrano nella sua determinazione. All'interno di questo paragrafo sono enunciati ed analizzati entrambi.

1.3.1 Elasticità di sostituzione ordinaria

L'elasticità di sostituzione ordinaria è calcolata tra due input del processo produttivo indipendentemente dalla presenza di altri input. Dati due generici fattori produttivi x_i e x_j con $i \neq j$ contenuti all'interno del vettore $\mathbf{x}$, l'elasticità di sostituzione ordinaria[6] è definita come il rapporto tra la variazione percentuale del rapporto tra le loro quantità e la variazione percentuale del saggio marginale di sostituzione tecnica (SMST), cioè

$$\sigma = \frac{\dfrac{\partial(x_j/x_i)}{x_j/x_i}}{\dfrac{\partial\,\mathrm{SMST}(x_i,x_j)}{\mathrm{SMST}(x_i,x_j)}} = \frac{\partial(x_j/x_i)}{\partial\,\mathrm{SMST}(x_i,x_j)}\frac{\mathrm{SMST}(x_i,x_j)}{x_j/x_i} = \frac{\partial\log(x_j/x_i)}{\partial\log|\mathrm{SMST}(x_i,x_j)|} \tag{13}$$

dove il SMST relativo agli input considerati definisce la pendenza dell'isoquanto. Nell'ultima versione della (13) il SMST è in valore assoluto perché costituisce l'argomento della funzione logaritmo (condizione di esistenza). Si tenga presente che, quando $x_i = L$ (input lavoro) ed $x_j =$ (input capitale), il rapporto $x_j/x_i = K/L$ è detto **intensità di capitale**.

L'equazione che definisce il SMST è

$$\mathrm{SMST}(x_i,x_j) = \frac{dx_j}{dx_i}, \tag{14}$$

quindi esso si configura inoltre come il rapporto tra la produttività marginale dei due input considerati, infatti risulta

$$\mathrm{SMST}(x_i,x_j) = -\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\bigg/\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\,. \tag{15}$$

Dimostrazione:

Data una generica funzione di produzione $y = f(\mathbf{x})$, supponendo che i fattori produttivi subiscano una variazione infinitesima nelle loro quantità, si ottiene:

$$dy = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}dx_j$$

Poiché tale variazione non modifica la quantità prodotta, deve valere $dy = 0$, quindi

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}dx_j = 0,$$

dalla (14) risulta perciò

$$\mathrm{SMST}(x_i,x_j) = -\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\bigg/\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x})}.$$

Mentre il SMST si configura come la pendenza dell'isoquanto, l'elasticità di sostituzione rappresenta la curvatura dello stesso (Varian, 1992), quindi l'equazione (13) mostra come il rapporto nelle quantità di input utilizzate all'interno del processo di produzione subisca variazioni quando il SMST varia. L'elasticita di sostituzione assume valori positivi, cioè $\sigma \in [0,+\infty)$: quanto maggiore è l'elasticità di sostituzione, tanto maggiore è la possibilità di sostituire l'uno con l'altro gli input. Nel dettaglio:

[6] D'ora in avanti questo concetto sarà denominato semplicemente "elasticità di sostituzione".

- se $\sigma = 0 \Rightarrow$ input **perfetti complementi**, quindi non è possibile sostituire il minore impiego di uno con il maggiore impiego dell'altro e viceversa. Questo è il caso dei processi produttivi a proporzioni fisse;

- se $0 < \sigma < 1 \Rightarrow$ input **complementari**;

- se $\sigma > 1 \Rightarrow$ input **sostituti**;

- se $\sigma \to \infty \Rightarrow$ input **perfetti sostituti**, si può ottenere lo stesso livello di produzione diminuendo la quantità utilizzata di uno e incrementando in maniera proporzionale la quantità l'altro: l'isoquanto di produzione è perciò una retta.

1.3.2 Elasticità parziale di sostituzione

Quando la dimensione del vettore $\mathbf{x}$ è $n > 2$ l'elasticità di sostituzione tra due generici input non è la stessa che si ottiene attraverso l'equazione (13), in quanto la presenza di altri fattori produttivi influisce nel suo valore. In questo caso si parla di elasticità **parziale** di sostituzione, introdotta da Allen (1938) e nota perciò anche come elasticità di sostituzione di Allen-Uzawa.

Dati due generici input x_i e x_j $(i \neq j)$ l'elasticità parziale di sostituzione è definita dalla seguente espressione:

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{x_i x_j}\mathbf{f}'\mathbf{x}, \tag{16}$$

dove

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

è il vettore gradiente contenente le produttività marginali; la quantità γ_{ij} è data dall'elemento posto all'incrocio dell'i-esima riga e la j-esima colonna della matrice inversa dell'Hessiana bordata[7] della funzione di produzione data da

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{f}' \\ \mathbf{f} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

dove

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

è la matrice Hessiana contenente le derivate seconde.

Per la regola di inversione di una generica matrice quadrata[8] il coefficiente γ_{ij} è definito come

$$\gamma_{ij} = \frac{|\mathbf{G}_{ij}|}{|\mathbf{G}|}, \tag{18}$$

[7] Per la definizione della matrice Hessiana bordata di $f(\mathbf{x})$ si veda la Proposizione 3 in Appendice.

[8] Si veda in proposito la Proposizione 2 in Appendice.

dove $|\mathbf{G}|$ è il determinante dell'Hessiana bordata, mentre $|\mathbf{G}_{ij}|$ è un minore di $\mathbf{G}$, cioè il determinante della matrice Hessiana bordata alla quale sono state tolte la i-esima riga e la j-esima colonna.[9]

Per la proprietà 3 della Proposizione 1 unitamente alla definizione di cui alla (16) si evince che l'elasticità parziale di sostituzione è sempre simmetrica, quindi vale la relazione $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Naturalmente, quando la tecnologia comprende solo due input ($n = 2$), l'elasticità parziale di sostituzione coincide col valore dell'elasticità di sostituzione ordinaria σ di cui alla (13).

<u>*Dimostrazione:*</u>

Partendo dalla seconda espressione di cui alla (13), occorre dimostrare che essa è uguale all'elasticità parziale di sostituzione tra gli (unici) input x_1 e x_2. Analiticamente deve perciò risultare

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial\ \mathrm{SMST}(x_1,x_2)}\frac{\mathrm{SMST}(x_1,x_2)}{x_2/x_1} &= \frac{\gamma_{12}}{x_1x_2}\mathbf{x}'\mathbf{f} \\ &= \frac{|\mathbf{G}_{ij}|}{|\mathbf{G}|}\frac{x_1f_1+x_2f_2}{x_1x_2} \\ &= \frac{f_1f_2}{|\mathbf{G}|}\frac{x_1f_1+x_2f_2}{x_1x_2}, \end{aligned}$$

in quanto vale la relazione

$$|\mathbf{G}_{12}| = \left|\begin{bmatrix} 0 & f_1 \\ f_2 & f_{12} \end{bmatrix}\right| = -f_1f_2,$$

dove $f_{12} = \dfrac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1}$. Calcolando il differenziale del rapporto x_2/x_1 si ha

$$\begin{aligned} d(x_2/x_1) &= \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(x_2/x_1)}{\partial x_2}dx_2 \\ &= -\frac{x_2}{x_1^2}dx_1 + \frac{1}{x_1}dx_2 \\ &= \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2} \\ &= \frac{x_1\dfrac{dx_2}{dx_1} - x_2}{x_1^2}dx_1 \end{aligned}$$

Dato che $\mathrm{SMST}(x_1,x_2) = \dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{f_1}{f_2}$, risulta

$$\begin{aligned} d(x_2/x_1) &= -\frac{x_1\dfrac{f_1}{f_2} + x_2}{x_1^2}dx_1 \\ &= -\frac{x_1f_1 + x_2f_2}{x_1^2f_2}dx_1 \end{aligned}$$

Analogamente per il differenziale di SMST è

$$\begin{aligned} d\ \mathrm{SMST}(x_1,x_2) &= \frac{\partial\ \mathrm{SMST}(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\ \mathrm{SMST}(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2 \\ &= -\left[\frac{\partial f_1/f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{f_1/f_2}{\partial x_2}dx_2\right] \\ &= -\frac{1}{f_2^2}\left\{\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}f_1\right]dx_1 - \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}f_1\right]dx_2\right\} \\ &= -\frac{[f_{11}f_2 - f_{21}f_1]dx_1 + [f_{12}f_2 - f_{22}f_1]dx_2}{f_2^2}. \end{aligned}$$

[9] Si tenga presente che la matrice $\mathbf{G}$ ha dimensione $(n+1)\times(n+1)$ che ovviamente è superiore alla dimensione di $\mathbf{x}$; nel computo del coefficiente γ_{ij} ci sono quindi una riga ed una colonna che non possono mai essere escluse. In questo caso la prima riga e la prima colonna, che contengono lo zero, non vengono mai escluse. Così, ad esempio, volendo calcolare σ_{23} ($i = 2$, $j = 3$), la matrice $\mathbf{G}_{23}$ sarà ottenuta togliendo la terza riga e la quarta colonna di G.

Dato che per la definizione di SMST(x_1, x_2) risulta $dx_2 = -\dfrac{f_1}{f_2}dx_1$, sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} d\ \text{SMST}(x_i, x_j) &= -\frac{[f_{11}f_2^2 - f_1 f_{21} f_2]dx_1 - [f_1 f_{12} f_2 - f_{22} f_1^2]dx_1}{f_2^3} \\ &= -\frac{f_{11}f_2^2 - 2f_1 f_{21} f_2 + f_{22} f_1^2}{f_2^3}dx_1 \\ &= -\frac{|\mathbf{G}|}{f_2^3}dx_1, \end{aligned}$$

in quanto, per la regola di Sarrus, il determinante della matrice Hessiana bordata è

$$|\mathbf{G}| = \left| \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \right| = f_{11} f_2^2 - 2f_1 f_{21} f_2 dx_1 + f_{22} f_1^2.$$

L'elasticità di sostituzione ordinaria di cui alla (13) vale perciò

$$\sigma = \frac{-\dfrac{f_1}{f_2}}{\dfrac{x_2}{x_1}} \frac{-\dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{x_2^2 f_2} dx_1}{\dfrac{|\mathbf{G}|}{f_2^3}} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{x_1 x_2} \frac{f_1 f_2}{|\mathbf{G}|} = \frac{\gamma_{ij}}{x_i x_j} \mathbf{f}'\mathbf{x}.$$

Si tenga presente che, per $n > 2$, l'elasticità parziale di sostituzione può assumere sia valori positivi, sia valori negativi: nel primo caso si parla di input **concorrenti**, cioè la sostituzione dell'uno determina l'aumento della domanda dell'altro, mentre nel secondo caso gli input sono detti **complementari**, quindi la sostituzione di uno non comporta necessariamente l'aumento della domanda dell'altro. Ciò è dovuto al fatto che esistono altri fattori da poter utilizzare all'interno del processo di produzione. Allen (1938) mostra che i valori positivi di σ_{ij} «devono essere più numerosi e/o più importanti di quelli negativi».

Dimostrazione:

Innanzi tutto si definisce con h_j la quota del costo totale spesa per l'input j-esimo. Essa è per definizione positiva o al limite nulla.

$$h_j = \frac{x_j f_j}{\mathbf{x}'\mathbf{f}}.$$

Moltiplicando gli elementi dell'i-esima riga della matrice $\mathbf{G}$ per i complementi algebrici relativa ad una riga k con $\neq i$, per la Proposizione 5 risulta

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} (-1)^{i+j} |\mathbf{G}_{kj}| = 0.$$

Analogamente risulta

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \sigma_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j |\mathbf{G}_{kj}|}{x_i |\mathbf{G}|} = 0.$$

Esplicitando la somma si ha

$$\begin{aligned} h_1\sigma_{k1} + h_2\sigma_{k2} + \ldots + h_{k-1}\sigma_{kk-1} + h_k\sigma_{kk} + h_{k+1}\sigma_{kk+1} + \ldots + h_n\sigma_{kn} &= 0 \\ h_1\sigma_{k1} + h_2\sigma_{k2} + \ldots + h_{k-1}\sigma_{kk-1} + h_{k+1}\sigma_{kk+1} + \ldots + h_n\sigma_{kn} &= -h_k\sigma_{kk}. \end{aligned}$$

Poiché per il Proposizione 4 risulta $h_k\sigma_{kk} < 0$ per $\forall\ k$, si ottiene

$$h_1\sigma_{k1} + h_2\sigma_{k2} + \ldots + h_{k-1}\sigma_{kk-1} + h_{k+1}\sigma_{kk+1} + \ldots + h_n\sigma_{kn} > 0$$

1.4 Rendimenti di scala

Per quanto riguarda l'elasticità di sostituzione l'interesse era concentrato sulla variazione di un solo input all'interno del processo produttivo. Per vedere cosa accade quando tutti gli input variano nello stesso momento occorre utilizzare il concetto di rendimento di scala.

Dato il vettore $\mathbf{x} \in V(y)$ degli input, lo scalare y relativo alla produzione ed una costante moltiplicativa $t > 0$ si afferma che una tecnologia esibisce rendimenti di scala

- **costanti** se $f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x})$: il livello di produzione è aumentato esattamente nella stessa misura in cui sono aumentati i fattori produttivi;

- **crescenti** se $f(t \cdot \mathbf{x}) > t \cdot f(\mathbf{x})$: il livello di produzione è aumentato più di quanto è aumentato l'impiego dei fattori produttivi;

- **decrescenti** se $f(t \cdot \mathbf{x}) < t \cdot f(\mathbf{x})$: il livello di produzione è aumentato meno di quanto è aumentato l'impiego dei fattori produttivi.

Un indicatore di quanto cambia la produzione quando varia la scala dei fattori è **l'elasticità di scala**, calcolata rispetto la situazione di $t = 1$. La sua definizione analitica è

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \left| \frac{\dfrac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{f(t \cdot \mathbf{x})}}{\dfrac{\partial t}{t}} \right|_{t=1} = \left| \frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial t} \frac{t}{f(t \cdot \mathbf{x})} \right|_{t=1} = \left| \frac{\partial \ln f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial \ln t} \right|_{t=1}. \tag{19}$$

Il valore critico è $\varepsilon(\mathbf{x}) = 1$ che corrisponde ai rendimenti di scala costanti; valori maggiori/minori di 1 indicano rendimenti di scala crescenti/decrescenti.

1.5 Omogeneità

Strettamente connesso al concetto di rendimento di scala è quello relativo all'omogeneità delle funzione di produzione $f(\mathbf{x})$; in particolare, una funzione è detta omogenea di grado k se è verificata la relazione

$$f(t \cdot \mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x}) \tag{20}$$

per $\forall\ t > 0$. I due casi più importanti sono i seguenti:

- Se $k = 0$ significa che l'incremento di quantità negli input non produce variazioni nel livello di output prodotto. Analiticamente risulta perciò

$$f(t \cdot \mathbf{x}) = f(\mathbf{x});$$

- Se $k = 1$ l'incremento dell'output è pari all'incremento effettuato sulla quantità dei fattori produttivi impiegati, cioè

$$f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}).$$

In questo caso la tecnologia esibisce rendimenti di scala costanti. Inoltre, se $k > 1$ i rendimenti di scala sono crescenti e per $k < 1$ i rendimenti di scala sono decrescenti.

Le principali proprietà delle funzioni omogenee sono

1. l'elasticità di scala calcolata su funzioni omogenee è costante, infatti

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\partial \ln t^k f(\mathbf{x})}{\partial \ln t} = \frac{\partial k \ln t + \ln f(\mathbf{x})}{\partial \ln t} = k. \tag{21}$$

2. se $f(\mathbf{x})$ è omogenea di grado k, allora tutte le funzioni del vettore gradiente (produttività marginali) $\partial f(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ sono omogenee di grado $k - 1$.

<u>*Dimostrazione:*</u>

Differenziando entrambi i membri della funzione (20) rispetto al generico input x_i, si ottiene

$$\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial x_i} t = t^k \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial x_i} = t^{k-1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Inoltre, data questa definizione, è evidente che, per $i \neq j$, deve valere

$$\frac{\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial (x_i)}}{\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial (x_j)}} = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = \mathrm{SMST}(x_i, x_j),$$

dato che t^{k-1} si semplifica. Si noti che l'equazione precedente ci dice che, se la funzione di produzione è omogenea, il $\mathrm{SMST}(x_i, x_j)$ è costante lungo i raggi uscenti dall'origine, cioè non dipende dalla scala di produzione.

---

3. **Teorema di Eulero**: se la funzione di produzione è omogenea, la sommatoria del prodotto tra le produttività marginali e le quantità di fattori è uguale all'elasticità di scala (costante) moltiplicata per l'output, cioè
$$\mathbf{f}'\mathbf{x} = kf(\mathbf{x}) \tag{22}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Derivando entrambi i membri della (20) rispetto t, si ottiene

$$\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial t} = kt^{k-1} f(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial (t \cdot \mathbf{x})} \frac{\partial (t \cdot \mathbf{x})}{\partial t} = kt^{k-1} f(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial f(t \cdot \mathbf{x})}{\partial (t \cdot \mathbf{x})} \mathbf{x} = kt^{k-1} f(\mathbf{x})$$

che vale per $\forall\ t$; l'equazione di Eulero è ottenuta in corrispondenza di $t = 1$, infatti

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial (\mathbf{x})} \mathbf{x} = kf(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}'\mathbf{x} = kf(\mathbf{x})$$

1.6 Omoteticità

Date le funzioni $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ omogenea e $h(z) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ monotòna e continua, una funzione è detta omotetica se può essere specificata come il prodotto di composizione

$$\phi(\mathbf{x}) = h[g(\mathbf{x})]. \tag{23}$$

le principali proprietà delle funzioni omotetiche sono:

1. tutte le funzioni omogenee sono omotetiche, mentre non tutte le funzioni omotetiche sono omogenee (cfr. Vaglio, 2004).

Dimostrazione:

Se $g(\mathbf{x})$ è omogenea di grado k e $h(z)$ è omogenea di grado r, $\phi(\mathbf{x})$ è omogenea di grado kr. Questa proprietà dimostra la prima parte dell'enunciato. In generale, se $g(t \cdot \mathbf{x}) = t^k g(\mathbf{x})$ e $h(t \cdot z) = t^r h(z)$, deve valere

$$\phi(t \cdot \mathbf{x}) = h[g(t \cdot \mathbf{x})] = h[t^k g(\mathbf{x})] = (t^k)^r h[g(\mathbf{x})] = t^{kr} \phi(\mathbf{x})$$

Per la seconda parte dell'enunciato basta ripercorrere la formula a ritroso per scoprire che esistono funzioni tali per cui può risultare

$$t^{kr} \phi(\mathbf{x}) \neq t^{kr} h[g(\mathbf{x})].$$

Esempio 2 *Si consideri la funzione* $\phi(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^\alpha x_2^\beta}$. *In questo caso si hanno* $g(\mathbf{x}) = x_1^\alpha x_2^\beta$ *e* $h(z) = \sqrt{z}$. *Queste funzioni sono entrambe omogenee, infatti*

$$\begin{cases} g(t \cdot \mathbf{x}) = (t \cdot x_1)^\alpha (t \cdot x_1)^\beta = t^{\alpha+\beta} x_1^\alpha x_2^\beta = t^{\alpha+\beta} g(\mathbf{x}) \\ h(t \cdot z) = \sqrt{t \cdot z} = t^{1/2} \sqrt{z} = t^{0.5} h(z) \end{cases},$$

dove $k = (\alpha + \beta)$ *e* $r = 0.5$. *La funzione* $\phi(\mathbf{x})$ *è perciò omogenea, infatti*

$$\phi(t \cdot \mathbf{x}) = h[g(t \cdot \mathbf{x})] = h[t^{\alpha+\beta} g(\mathbf{x})] = \sqrt{t^{\alpha+\beta} g(\mathbf{x})} = t^{0.5(\alpha+\beta)} \sqrt{g(\mathbf{x})} = t^{0.5(\alpha+\beta)} h[g(\mathbf{x})],$$

dove l'ordine di omogeneità è dato dal prodotto $kr = 0.5(\alpha + \beta)$.

Se si considera invece la funzione $g(\mathbf{x}) = 10 - x_1^\alpha x_2^\beta$, *questa non è omogenea in quanto risulta*

$$g(t \cdot \mathbf{x}) = 10 - (t \cdot x_1)^\alpha (t \cdot x_1)^\beta = 10 - t^{\alpha+\beta} x_1^\alpha x_2^\beta \neq t^{\alpha+\beta} g(\mathbf{x}).$$

In base a questa proprietà la funzione omotetica $\phi(\mathbf{x}) = \sqrt{10 - x_1^\alpha x_2^\beta}$ *non può essere omogenea.*

2. se le funzioni $g(\mathbf{x})$ e $h(z)$ sono omogenee e differenziabili almeno una volta, il SMST(x_i, x_j), cioè il rapporto tra due derivate parziali di una funzione omotetica, è una funzione omogenea di grado zero.

$$\text{SMST}(x_i, x_j) = -\frac{\dfrac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = -\frac{h'[g(\mathbf{x})] \dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{h'[g(\mathbf{x})] \dfrac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = -\frac{g_i}{g_j}. \quad (24)$$

Dimostrazione:

Se $g(\mathbf{x})$ è omogenea di grado k, per il Teorema di Eulero g_i e g_j sono omogenee di grado $k - 1$, quindi il loro rapporto è

$$R(t \cdot \mathbf{x}) = \frac{\dfrac{\partial \phi(t \cdot \mathbf{x})}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \phi(t \cdot \mathbf{x})}{\partial x_j}} = \frac{t^{k-1} g_i}{t^{k-1} g_j} = \frac{g_i}{g_j} = R(\mathbf{x}).$$

---

2 Scelte ottime dell'impresa

Come è noto, in microeconomia l'impresa persegue l'obiettivo della massimizzazione del profitto, ovvero la differenza tra i ricavi totali (RT) ed i costi totali (CT), in formule

$$\begin{aligned}\Pi(y) &= \mathrm{RT}(y) - \mathrm{CT}(y) \\ &= p(y) \cdot y - \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) \\ &= p[f(\mathbf{x})] \cdot f(\mathbf{x}) - \mathbf{w}'\mathbf{x},\end{aligned} \tag{25}$$

dove tutte le funzioni indicate dipendono dal livello di produzione dell'impresa. In particolare:

- $p(y)$ definisce il prezzo di vendita del prodotto come funzione della quantità prodotta fornita dalla funzione di produzione (curva **inversa** di domanda dell'impresa);
- $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x}$ definisce la **funzione di costo** dell'impresa che dipende della variabile endogena y e dai parametri forniti all'interno del vettore $\mathbf{w}$.

Naturalmente il valore massimo per la funzione di profitto (25) sarà dato dal livello di produzione $y^* = f(\mathbf{x}^*)$ che garantisce

(a) o il minimo costo sotto il vincolo della funzione di produzione,

(b) o il massimo per la produzione sotto il vincolo di costo.

2.1 Funzione di costo

Dato il vettore $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ contenente il prezzo degli n input, si definisce la funzione di costo come soluzione del seguente problema di minimo:

$$\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \min\{\mathbf{w}'\mathbf{x} | y \leq f(\mathbf{x})\}. \tag{26}$$

Dalla (26) si evince che la funzione obiettivo del problema di minimo è data dalla somma degli input ponderati per i rispettivi prezzi, mentre il vincolo fissa il livello di output ad una quantità che sia pari almeno ad y. Diewert (1982) e Shephard (1953) illustrano le seguenti proprietà delle funzioni di costo:

1. $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) \geq 0$ per $\forall$ $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ e $y > 0$;

   <u>*Dimostrazione:*</u>

   Supponendo che il vettore $\mathbf{x}^* \geq 0$ sia quello che minimizza la funzione di costo, si avrà che $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x}^*$. Poiché per definizione $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, allora anche la funzione di costo ritorna valori positivi.

2. Per il teorema di Weierstrass la funzione $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)$ deve essere continua nello spazio $\mathbb{R}^n_+$ in corrispondenza di $\mathbf{w} > 0$.

3. La funzione di costo è linearmente omogenea nei prezzi per qualsiasi livello di output, quindi

   $$\mathrm{C}(t \cdot \mathbf{w}, y) = t \cdot \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)$$

   per $\forall$ $\mathbf{w} > \mathbf{0}$, $y > 0$.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(t \cdot \mathbf{w}, y) &= \min\{t \cdot \mathbf{w}'\mathbf{x} | y \leq f(\mathbf{x})\} \\ &= t \cdot \min\{\mathbf{w}'\mathbf{x} | y \leq f(\mathbf{x})\} \\ &= t \cdot \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) \end{aligned}$$

---

4. La funzione di costo è monotòna non decrescente nei prezzi dei fattori, infatti, per qualsiasi valore prefissato di y, risulta

$$\text{se } \mathbf{w_1} > \mathbf{w_2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}(\mathbf{w_1}, y) \geq \mathrm{C}(\mathbf{w_2}, y). \tag{27}$$

Dimostrazione:

Dalla (27) si evince che, se il vettore dei prezzi degli input aumenta in almeno una sua componente, il costo minimo per produrre la stessa quantità di output sicuramente non diminuisce; tuttavia tale costo potrebbe addirittura restare invariato nell'ipotesi in cui nel processo di produzione l'input il cui costo è aumentato venisse escluso da tale processo o sostituito da altri fattori scarsamente utilizzati in precedenza.

---

5. A parità di $\mathbf{w}$, la funzione di costo è non decrescente nel livello di output, cioè

$$\text{se } y_1 > y_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C}(\mathbf{w}, y_1) > \mathrm{C}(\mathbf{w}, y_2). \tag{28}$$

Dimostrazione:

Si pensi allo schema isoquanto-isocosto: non è mai possibile raggiungere un isoquanto più "alto" rimanendo lungo la stessa retta di isocosto poiché l'intersezione (punto di tangenza) è, per definizione, il punto in cui il costo è minimo per l'impresa; aumentare la quantità prodotta porta perciò inevitabilmente ad un aumento dei costi.
Cambiando il punto di vista si potrebbe dire che la quantità di input per produrre y_1 è sicuramente sufficiente per produrre y_2, ma non rappresenta la quantità ottima; dall'altro lato, la quantità necessaria per produrre y_2 non può essere mai sufficiente per produrre y_1.

---

6. La funzione di costo è concava in $\mathbf{w}$, cioè

$$\mathrm{C}(\theta \mathbf{w_1} + (1-\theta)\mathbf{w_2}, y) \geq \theta \mathrm{C}(\mathbf{w_1}, y) + (1-\theta)\mathrm{C}(\mathbf{w_2}, y) \tag{29}$$

per $\forall\ y \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0,1]$. Questa proprietà garantisce inoltre che

$$\frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i^2} < 0$$

per $\forall\ i \in [1, n]$.

Dimostrazione:

Siano $\mathrm{C}(\mathbf{w_1}, y) = \mathbf{w_1'x_1}$ e $\mathrm{C}(\mathbf{w_2}, y) = \mathbf{w_2'x_2}$ due funzioni di costo, si costruisce la combinazione lineare

$$\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{C}(\theta \mathbf{w_1} + (1-\theta)\mathbf{w_2}, y) = \theta \mathbf{w_1'x} + (1-\theta)\mathbf{w_2'x}.$$

Poiché per $\mathbf{w_1} \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{w_2}$ deve valere

- $\mathbf{w_1'x_1} \leq \mathbf{w_1'x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w_1'x} \geq \mathrm{C}(\mathbf{w_1}, y)$,
- $\mathbf{w_2'x_2} \leq \mathbf{w_2'x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w_2'x} \geq \mathrm{C}(\mathbf{w_2}, y)$,

allora risulta

$$\begin{aligned}
C(\theta \mathbf{w_1} + (1-\theta)\mathbf{w_2}, y) &= \theta \mathbf{w_1'x} + (1-\theta)\mathbf{w_2'x} \\
&\geq \theta \mathbf{w_1'x_1} + (1-\theta)\mathbf{w_2'x_2} \\
&\geq \theta C(\mathbf{w_1}, y) + (1-\theta) C(\mathbf{w_2}, y).
\end{aligned}$$

---

7. **Teorema di Diewert (1982)-Shephard (1953):** se la funzione di produzione è omotetica ed omogenea di grado 1, quindi $f(\mathbf{x}) = h[g(\mathbf{x})]$, allora risulta

$$C(\mathbf{w}, y) = h^{-1}(y) C(\mathbf{w}, 1)$$

dove $C(\mathbf{w}, 1)$ è la funzione di costo unitario dell'impresa.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{w}, y) &= \min\{\mathbf{w'x} | f(\mathbf{x}) \geq y\} \\
&= \min\{\mathbf{w'x} | h[g(\mathbf{x})] \geq y\} \\
&= \min\{\mathbf{w'x} | g(\mathbf{x}) \geq h^{-1}(y)\}.
\end{aligned}$$

Moltiplicando e dividendo per $h^{-1}(y)$ si ha

$$C(\mathbf{w}, y) = \min\left\{ h^{-1}(y)\mathbf{w'x}\frac{1}{h^{-1}(y)} \,\middle|\, \frac{g(\mathbf{x})}{h^{-1}(y)} \geq 1 \right\}.$$

Ponendo $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{x}}{h^{-1}y}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{w}, y) &= \min\{h^{-1}(y)\mathbf{w'z} | g(\mathbf{z}) \geq 1\} \\
&= h^{-1}(y) \min\{\mathbf{w'z} | g(\mathbf{z}) \geq 1\} \\
&= h^{-1}(y) C(\mathbf{w}, 1)
\end{aligned}$$

---

8. **Teorema di Samuelson-Shephard:** se la funzione di produzione è omogenea di grado k risulta

$$C(\mathbf{w}, y) = y^{1/k} C(\mathbf{w}, 1), \tag{30}$$

dove $k > 0$ è l'elasticità di scala. Questo teorema rappresenta un caso particolare del Teorema di Diewert-Shephard.

Dimostrazione:

Imponendo $t = y$, dalla (20) risulta

$$\begin{aligned}
&f(y \cdot \mathbf{x}) = y^k f(\mathbf{x}) \\
&f(y^{-1/k}\mathbf{x}) = y^{-1} f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Sostituendo nella funzione di costo si ottiene

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{w}, y) &= \min\{\mathbf{w'x} | f(\mathbf{x}) \geq y\} \\
&= \min\{\mathbf{w'x} | y^{-1} f(\mathbf{x}) \geq 1\} \\
&= \min\{y^{1/k} y^{-1/k}\mathbf{w'x} | f(y^{-1/k}\mathbf{x}) \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Ponendo $\mathbf{z} = y^{-1/k}\mathbf{x}$ si ha

$$\begin{aligned}
C(\mathbf{w}, y) &= \min\{y^{1/k}\mathbf{w'z} | f(\mathbf{z}) \geq 1\} \\
&= y^{1/k} \min\{\mathbf{w'z} | f(\mathbf{z}) \geq 1\} \\
&= y^{1/k} C(\mathbf{w}, 1).
\end{aligned}$$

2.2 Minimizzazione dei costi

Sotto l'ipotesi che il mercato sia concorrenziale, cioè composto da imprese *price taker* e nel quale quantità prodotte e prezzi siano dati, il ricavo totale si configura come una quantità esogena. In questo contesto l'impresa massimizza il profitto risolvendo il seguente problema di minimo vincolato:

$$\begin{cases} \min & \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x} \\ \text{sub} & f(\mathbf{x}) = y_0, \end{cases} \tag{31}$$

dove $C(\mathbf{w}, y)$ è la funzione di costo dell'impresa, $f(\mathbf{x})$ è la funzione di produzione dell'impresa e y_0 è un dato livello di output che l'impresa è tenuta a produrre.

La soluzione del sistema è ottenuta attraverso il Lagrangiano

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{w}'\mathbf{x} - \lambda[f(\mathbf{x}) - y_0] \tag{32}$$

che, derivato rispetto a λ e al vettore $\mathbf{x}$, ritorna il seguente sistema di $n+1$ equazioni con $n+1$ incognite $(\lambda, \mathbf{x})$

$$\begin{cases} y_0 - f(\mathbf{x}) = 0 & \text{(1 equazione)} \\ \mathbf{w} - \lambda\mathbf{f} = \mathbf{0} & (n \text{ equazioni}). \end{cases} \tag{33}$$

2.2.1 Costi marginali e costi medi

Le soluzioni del sistema (31) sono

(a) la domanda **condizionale** di fattori produttivi (o domanda *hicksiana*)

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{w}, y_0) \tag{34}$$

che corrisponde ad un vettore in cui ciascuna componente costituisce una funzione dipendente da tutti gli input e dal livello prefissato di produzione (ciascuna domanda è perciò condizionata dal fatto che che $y = y_0$);

(b) il moltiplicatore di Lagrange è pari a

$$\lambda^* = \lambda^*(\mathbf{w}, y_0) = \frac{1}{k}\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0), \tag{35}$$

dove le espressioni $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0)$ e $\mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$ indicano rispettivamente il **costo medio** ed il **costo marginale** condizionali al fatto che la produzione è stata fissata sul livello $y = y_0$. Questa relazione fissa inoltre la relazione che intercorre tra questi due tipi di funzione di costo.

<u>*Dimostrazione:*</u>

1. $\lambda^* = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y)$:
Si consideri la funzione di costo calcolata in corrispondenza della soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ e la si derivi rispetto alla produzione. Tale derivata equivale a

$$\begin{aligned} \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y) &= \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \mathbf{w}'\mathbf{x}_0}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \mathbf{w}'\mathbf{x}_0}{\partial y} - \lambda(\mathbf{w}, y)[f(\mathbf{x}_0) - y], \end{aligned}$$

dove $f(\mathbf{x}_0) - y = 0$ per definizione, quindi si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial y} &= \mathbf{w}'\frac{\partial\ \mathbf{x}_0}{\partial y} - \left\{\frac{\partial\lambda(\mathbf{w}, y)}{\partial y}[f(\mathbf{x}_0) - y] + \lambda(\mathbf{w}, y)\left[\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial y} - 1\right]\right\} \\ &= \mathbf{w}'\frac{\partial\ \mathbf{x}_0}{\partial y} - \left\{\frac{\partial\lambda(\mathbf{w}, y)}{\partial y}[f(\mathbf{x}_0) - y] + \lambda(\mathbf{w}, y)\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0}\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial y} - \lambda(\mathbf{w}, y)\right\} \\ &= \mathbf{w}'\frac{\partial\ \mathbf{x}_0}{\partial y} - \left\{\frac{\partial\lambda(\mathbf{w}, y)}{\partial y}[f(\mathbf{x}_0) - y] + \lambda(\mathbf{w}, y)\mathbf{f}'\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial y} - \lambda(\mathbf{w}, y)\right\} \\ &= [\mathbf{w}' - \lambda(\mathbf{w}, y)\mathbf{f}']\frac{\partial\ \mathbf{x}_0}{\partial y} - \left\{\frac{\partial\lambda(\mathbf{w}, y)}{\partial y}[f(\mathbf{x}_0) - y] - \lambda(\mathbf{w}, y)\right\}. \end{aligned}$$

Poiché $[f(\mathbf{x}_0) - y] = 0$ (vincolo sulla funzione di produzione) e $[\mathbf{w}' - \lambda(\mathbf{w}, y)\mathbf{f}'] = 0$ (condizione del primo ordine sul Lagrangiano), è chiaro che risulta

$$\lambda^*(\mathbf{w}, y) = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y).$$

2. $\lambda^* = \dfrac{1}{k}\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y)$:

Si consideri il sistema di n equazioni di cui alla seconda espressione in (33) e si moltiplichino entrambi i membri per $\mathbf{x}'$. Il risultato che si ottiene è

$$\begin{aligned} &\mathbf{w}'\mathbf{x} = \lambda\mathbf{f}'\mathbf{x} \\ &\lambda^* = (\mathbf{f}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{w}'\mathbf{x}, \end{aligned}$$

dove $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x}$ è il costo totale dell'impresa, mentre $\mathbf{f}'\mathbf{x}$ rappresenta la somma dei costi dei fattori produttivi ponderata per il contributo che ciascun fattore produttivo dà alla produzione.

Applicando l'equazione di Eulero si ottiene $\mathbf{f}'\mathbf{x} = kf(\mathbf{x})$ quindi, risulta

$$\lambda^* = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{ky}.$$

Poiché il costo medio è definito come $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y) = \dfrac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{y}$, allora risulta

$$\lambda^* = \frac{1}{k}\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y).$$

Il parametro k relativo all'elasticità di scala è decisivo per stabilire il rapporto tra costo medio e costo marginale, infatti

- se $k = 1$ (rendimenti di scala costanti) risulta $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$,
- se $k > 1$ (rendimenti di scala crescenti) risulta $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) > \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$,
- se $0 < k < 1$ (rendimenti di scala decrescenti) risulta $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) < \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$.

Questa caratteristica delle funzioni di costo è determinabile anche utilizzando le definizioni analitiche di costo medio e costo marginale, infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)/y}{\partial y} \\ &= \frac{1}{y^2}\left[\frac{\partial \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial y}y - \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)\right] \\ &= \frac{1}{y}\left[\frac{\partial \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial y} - \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{y}\right] \\ &= \frac{1}{y}[\mathrm{C}'(\mathbf{w}, y) - \bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y)]. \end{aligned}$$

Da questo risultato emerge che

- se $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$ i rendimenti di scala sono costanti quando la curva del costo medio è orizzontale,
- se $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) > \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$ i rendimenti di scala crescenti quando la curva del costo medio è decrescente,
- se $\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y_0) < \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y_0)$ i rendimenti di scala decrescenti) quando la la curva del costo medio è crescente.

Si noti che gli schemi neoclassici con le curve di costo a "U" oppure quelli con le c.d. "curve a catino" rispettano in pieno tutte queste condizioni.

Il problema di cui alla (31) non è sempre risolvibile con il metodo illustrato poc'anzi. Possono pertanto verificarsi alcune situazioni particolari come

- la funzione di produzione non è differenziabile (presenza di cuspidi o punti angolosi nella mappa degli isoquanti);
- alcuni fattori produttivi possono essere esclusi dal processo produttivo, quindi risulta $x_i = 0$ per almeno un $i \in [1, n]$. In questo caso dalla (33) si hanno le c.d. **soluzioni d'angolo** e risulta

$$\mathbf{w} - \lambda\mathbf{f} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p(y)\mathbf{f} \leq \mathbf{w},$$

  cioè esiste almeno un input per il quale la **produttività marginale in valore** è inferiore al costo dell'input stesso. Questo risultato deriva direttamente dall'ipotesi di mercato concorrenziale nel quale vale l'uguaglianza $\lambda = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y) = p(y)$.

2.2.2 Lemma di Shephard

Il lemma di Shephard costituisce un importante risultato in quanto afferma che la domanda condizionale del fattore produttivo i-esimo è data dalla quantità ottimale dello stesso, cioè quella quantità che rende minimo il costo per l'impresa.

Sia $x_i^* = x_i^*(\mathbf{w}, y)$ la domanda condizionale dell'i-esimo input, se la funzione di costo è differenziabile rispetto agli elementi del vettore $\mathbf{w}$, allora risulta:

$$x_i^* = \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i}. \tag{36}$$

In pratica, il Lemma di Shephard afferma che la variazione di prezzo di un fattore produttivo comporta una variazione del costo totale (minimo) dell'impresa pari alla domanda/utilizzo del fattore stesso.

<u>*Dimostrazione:*</u>

Scrivendo la funzione di costo come $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x}_0$, dove $\mathbf{x}_0 = x_0(\mathbf{w}, y)$ è la stessa definita dall'equazione (34), la derivata rispetto all'i-esimo input è

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} &= \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial w_i}\right]' \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}'\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial w_i} \\ &= x_{0i} + \mathbf{w}'\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial w_i}. \end{aligned}$$

Dall'equazione (33) risulta $\mathbf{w} - \lambda\mathbf{f} = 0$ quindi, sostituendo, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} &= x_{0i} + \lambda\mathbf{f}'\frac{\partial \mathbf{x_0}}{\partial w_i} \\ &= x_{0i} + \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x_0}}\right]' \frac{\partial \mathbf{x_0}}{\partial w_i} \\ &= x_{0i} + \lambda\frac{\partial y}{\partial w_i} \end{aligned}$$

Poiché la quantità y è data, la derivata della funzione di produzione rispetto all'i-esimo input è nulla per definizione, quindi si ottiene li Lemma di Shephard

$$x_i = \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i}.$$

Dal Lemma di Shephard deriva la proprietà secondo la quale la funzione di domanda condizionale di fattori produttivi è omogenea di grado zero.

<u>*Dimostrazione:*</u>

Se la funzione di costo ha la proprietà di essere linearmente omogenea nei fattori produttivi, allora la sua derivata rispetto ad essi deve essere omogenea di grado zero.

2.2.3 Equilibrio dell'impresa rispetto alla produzione

Riprendendo la seconda equazione di cui alla (25) si ha

$$\Pi(y) = p(y) \cdot y - \mathrm{C}(\mathbf{w}, y),$$

cioè una funzione nel livello di output y da massimizzare. L'equilibrio dell'impresa è perciò ottenuto con la classica uguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale che scaturisce dall'applicazione della condizione del primo ordine, infatti

$$\frac{\partial \Pi(y)}{\partial y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial p(y) \cdot y}{\partial y} = \frac{\partial \ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{R}'(y) = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y).$$

Il ricavo marginale $\mathrm{R}'(y)$ è una funzione del livello di produzione y che corrisponde alla derivata del ricavo totale rispetto alla variabile y. Essa ha le seguenti proprietà:

1. Il ricavo marginale non può essere negativo, altrimenti l'impresa avrebbe ricavi totali decrescenti all'aumentare della quantità prodotta; il ricavo marginale è nullo in corrispondenza del punto di massimo del ricavo totale.

   Dimostrazione:

   Intuitivamente si pensi al caso in cui l'impresa abbia solo costi fissi (che non dipendono perciò dalla quantità prodotta y), quindi il costo marginale è nullo: in questo caso l'impresa massimizzerebbe il proprio profitto in corrispondenza del livello di output per il quale il ricavo marginale è anch'esso nullo, cioè nel punto di massimo della curva del ricavo totale.

   ---

2. Il ricavo marginale è in relazione con l'elasticità della domanda al prezzo $\varepsilon(y, p)$, cioè

   $$\mathrm{R}'(y) = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon(y, p)}\right] p(y). \tag{37}$$

   Poiché il ricavo marginale non può essere negativo, questa relazione vale quando la domanda è elastica, cioè $\varepsilon(y, p) \leq -1$. Ad una domanda rigida $\varepsilon(y, p) \in (-1, 0]$ corrisponde perciò un ricavo marginale negativo, pertanto non ammissibile.

   Dimostrazione:

   $$\begin{aligned} \mathrm{R}'(y) &= \frac{\partial p(y) \cdot y}{\partial y} \\ &= \frac{\partial p(y)}{\partial y} y + p(y) \\ &= \left[\frac{\partial p(y)}{\partial y} \frac{y}{p(y)} + 1\right] p(y) \\ &= \left[1 + \frac{1}{\varepsilon(y, p)}\right] p(y). \end{aligned}$$

   Quando l'impresa è in equilibrio, l'inversa della (37) definisce il **mark up**, cioè un moltiplicatore che indica di quanto la singola impresa riesce a ricaricare il prezzo rispetto ai costi marginali. Analiticamente si ha perciò

   $$p(y) = \left[1 + \frac{1}{\varepsilon(y, p)}\right]^{-1} \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y) = \left[\frac{\varepsilon(y, p)}{\varepsilon(y, p) + 1}\right] \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y)$$

   con $\varepsilon(y, p) \leq -1$.

3. Il ricavo marginale è sempre non superiore al ricavo medio (prezzo).

<u>*Dimostrazione:*</u>

Poiché $\varepsilon(y,p) \in (-\infty,-1]$, dalla (37) segue immediatamente che

$$\mathrm{R}'(y) \leq p(y),$$

dove l'uguaglianza stretta vale nel caso della **concorrenza perfetta**, cioè quando $\varepsilon(y,p) \to -\infty$.

---

4. Se il prezzo p è esogeno (costante), cioè non non dipende dal livello di produzione y, il ricavo marginale è

$$\mathrm{R}'(y) = \frac{\partial p \cdot y}{\partial y} = p, \tag{38}$$

quindi è sempre uguale al ricavo medio. In questo caso l'impresa opera in un mercato di concorrenza perfetta e non ha potere di mercato (*price taker*).

Affinché si possa applicare l'uguaglianza tra ricavi marginali e costi marginali, è necessario che la funzione di profitto abbia i seguenti requisiti:

(a) deve essere differenziabile, quindi le funzioni di produzione e di costo devono essere differenziabili rispetto alla variabile y;

(b) deve avere il proprio massimo per $y^* \in \mathbb{R}_+$, altrimenti i ricavi totali sarebbero negativi;

(c) affinché abbia un punto di massimo, la funzione di profitto deve essere concava in y, cioè

$$\frac{\partial^2 \Pi(y)}{\partial y^2} < 0.$$

In concorrenza perfetta questa relazione implica che

- la funzione di costo deve essere convessa in y, infatti

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Pi(y)}{\partial y^2} < 0 \\
&\frac{\partial^2 p \cdot y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w},y)}{\partial y^2} < 0 \\
&-\frac{\partial\ \mathrm{C}'(\mathbf{w},y)}{\partial y} < 0 \\
&\frac{\partial\ \mathrm{C}'(\mathbf{w},y)}{\partial y} > 0;
\end{aligned}$$

- l'equilibrio dell'impresa è possibile solo nel tratto crescente dei costi marginali;
- poiché $\mathrm{C}'(\mathbf{w},y) = \frac{1}{k}\bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w},y)$, allora l'equilibrio dell'impresa può avvenire solo se i rendimenti di scala sono decrescenti;
- il profitto massimo deve essere positivo, cioè
  - se $p \geq \mathrm{C}'(\mathbf{w},y^*)$ l'impresa produce $y = y^*$,
  - se $p < \mathrm{C}'(\mathbf{w},y^*)$ l'impresa non produce ($y = 0$);

- La quantità prodotta che massimizza il profitto è data da $y = y^*$ la quale garantisce che $\mathrm{R}'(y^*) = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y^*)$ sia verificata; naturalmente per un mercato perfettamente concorrenziale vale la relazione $p = \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y^*)$. In particolare, la quantità di equilibrio si configura come la **quantità offerta** dall'impresa (i costi marginali quindi si configurano come la funzione inversa di offerta) che dipende dal livello del prezzo e dal costo dei fattori produttivi, quindi

$$y^* = y^s(p, \mathbf{w}).$$

  L'analogia con l'equazione (1) è perciò evidente;

- derivando la condizione di equilibrio rispetto al prezzo si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial p} &= \frac{\partial\ \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y^*)}{\partial p} \\
1 &= \frac{\partial\ \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y^*)}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial p} \\
\frac{\partial y^*}{\partial p} &= \left[\frac{\partial\ \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y^*)}{\partial y^s(p, \mathbf{w})}\right]^{-1} > 0.
\end{aligned}$$

  La curva di offerta dell'impresa è perciò crescente rispetto al prezzo.

2.2.4 Equilibrio dell'impresa rispetto ai fattori produttivi

Concentrando l'attenzione sugli input, la funzione di profitto può essere scritta come segue

$$\Pi(\mathbf{x}) = p \cdot f(\mathbf{x}) - \mathbf{w}'\mathbf{x},$$

dove la quantità prodotta dipende dalla quantità impiegata di fattori produttivi, mentre il prezzo è un dato, quindi implicitamente si fa riferimento ad un mercato perfettamente concorrenziale. In questo contesto la funzione di produzione $f(\mathbf{x})$ è nota, mentre la funzione di costo non lo è.

L'equilibrio dell'impresa è ottenuto come segue

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\
&p\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{w}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \\
&p \cdot \mathbf{f} - \mathbf{w} = 0 \\
&p\mathbf{f} = \mathbf{w}. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Esso è fornito dall'uguaglianza tra **produttività marginale in valore** e costo dei fattori produttivi. In particolare

- se $f_i > w_i/p$ l'impresa aumenta l'utilizzo del fattore produttivo i-esimo perché il suo contributo alla produzione supera il suo costo reale,
- se $f_i < w_i/p$ l'impresa diminuisce l'utilizzo del fattore produttivo i-esimo perché il suo contributo alla produzione è inferiore al suo costo reale.

Legge di esaustione del prodotto: si consideri l'equazione di Eulero (equazione (22)) sostituendo al vettore $\mathbf{f}$ il vettore $\mathbf{w}/p$, quindi

$$\mathbf{f}'\mathbf{x} = k \cdot y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}'\mathbf{x} = k \cdot p \cdot y;$$

se $k = 1$ tutta la produzione viene utilizzata per remuneare i fattori produttivi. Si tenga presente che. nel mercato di concorrenza perfetta, per $k < 1$ entrano nuove imprese sul mercato attirate dal fatto che i ricavi sono maggiori dei costi), mentre lo scenario $k > 1$ non può essere applicato.

La soluzione per il vettore degli input che massimizza il profitto è data da

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{w}, y^*), \tag{40}$$

che corrisponde alla domanda **non condizionale** di fattori produttivi (o domanda *marshalliana*), ottenuta in corrispondenza del livello di produzione ottimale $y = y^*(\mathbf{w}, p)$.

Calcolando la derivata della domanda marshalliana dell'input i-esimo rispetto al prezzo del fattore produttivo j-esimo, applicando il Lemma di Shephard si ottiene

$$\frac{\partial x_i^*(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{w}, y^*)}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial w_j} = \mathrm{C}_{ij} + \frac{\mathrm{C}_{iy^*}\mathrm{C}_{jy^*}}{\mathrm{C}_{y^*y^*}}, \tag{41}$$

dove il rapporto a sinistra del segno di uguaglianza misura l'**effetto totale** sulla domanda di una variazione di prezzo di un input, mentre i due addendi misurano rispettivamente

- l'**effetto di sostituzione** tra l'input i-esimo e l'input j-esimo è dato da

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_j} = \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_i \partial w_j} = \mathrm{C}_{ij} \tag{42}$$

- l'**effetto output** è dato da

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i(\mathbf{w}, y^*)}{\partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial w_j} &= \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_i \partial y^*}\frac{\partial y^*}{\partial w_j}\frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)}{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)}\frac{\partial y^*}{\partial y^*} \\ &= \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_i \partial y^*}\frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)}{\partial w_j \partial y^*}\frac{\partial y^{*2}}{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y^*)} \\ &= \frac{\mathrm{C}_{iy^*}\mathrm{C}_{jy^*}}{\mathrm{C}_{y^*y^*}}.\end{aligned} \tag{43}$$

Le equazioni (41), (42) e (43) evidenziano che, presi due generici input x_i ed x_j, l'effetto di sostituzione, l'effetto output e l'effetto totale sono tutti simmetrici.

L'elasticità della domanda dell'input x_i rispetto al prezzo dell'input x_j è invece pari a

$$\varepsilon(x_i, w_j) = S_j \frac{C_{ij}}{C_i C_j}\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = S_j \sigma_{ij}, \tag{44}$$

dove, per il Lemma di Shephard $C_i = x_i$ e $C_j = x_j$, $S_j = \dfrac{w_j x_j}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}$ è la **factor share** del j-esimo fattore produttivo, mentre σ_{ij} è l'elasticità di sostituzione tra gli input i e j.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_i, w_j) &= \frac{\partial x_i}{\partial w_j}\frac{w_j}{x_i} \\ &= \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i \partial w_j}\frac{w_j}{x_i}\frac{x_j}{x_j}\frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} \\ &= \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i \partial w_j}\frac{w_j x_j}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}\frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{x_i x_j} \\ &= S_j \frac{\mathrm{C}_{ij}}{x_i x_j}\mathbf{w}'\mathbf{x}\end{aligned}$$

Dato che per la simmetria dell'effetto totale vale

$$\frac{\partial x_j}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{\partial x_i}{\partial f_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{\partial x_i \partial x_j}{\partial^2 y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i \partial w_j} = \gamma_{ij} \text{ (inversa matrice Hessiana)},$$

allora risulta

$$\begin{aligned} &= S_j \frac{\gamma_{ij}}{x_i x_j} \mathbf{w}'\mathbf{x} \\ &= S_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

2.2.5 Funzione di profitto

Una volta determinate la quantità ottimale di output (offerta) $y^* = y^s(\mathbf{w}, p)$ e la quantità (domanda) ottima di fattori produttivi $\mathbf{x}^* = \mathbf{x^d}(\mathbf{w}, p)$, è possibile sostituirle all'interno della (25) ottenendo perciò la seguente funzione di profitto

$$\Pi^*(\mathbf{w}, p) = p \cdot y^* - \mathbf{w}'\mathbf{x}^* \tag{45}$$

che dipende dal vettore dei prezzi $\mathbf{w}$, ma soprattutto dal livello (esogeno) del prezzo p.

Lemma di Hotelling: il valore ottimale per il livello di output è ottenuto derivando la funzione di massimo profitto rispetto al prezzo, mentre il valore ottimale per la domanda di input è dato dalla derivata della funzione di massimo profitto rispetto al prezzo dei fattori produttivi. In formule

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial p} = y^* \\[2ex] \dfrac{\partial \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial w_i} = -x_i^* \end{cases} \tag{46}$$

Dimostrazione:

Derivata della funzione di profitto rispetto al prezzo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial p} &= \frac{\partial p \cdot f(\mathbf{x})}{\partial p} - \mathbf{w}' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \\ &= f(\mathbf{x}) + p \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} - \mathbf{w}' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \\ &= y^* + p\mathbf{f}' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} - \mathbf{w}' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \\ &= y^* + [p\mathbf{f}' - \mathbf{w}'] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial p} \end{aligned}$$

Applicando la condizione del primo ordine (39) si ottiene perciò

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial p} = y^*.$$

Derivata della funzione di profitto rispetto all'i-esimo fattore produttivo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial w_i} &= p \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial w_i} - \frac{\partial \mathbf{w}'\mathbf{x}}{\partial w_i} \\ &= p \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w_i} - \left[\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial w_i} \right)' \mathbf{x} + \mathbf{w}' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w_i} \right] \\ &= [p\mathbf{f}' - \mathbf{w}'] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w_i} - x_i. \end{aligned}$$

Applicando la condizione del primo ordine (39) si ottiene perciò

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial w_i} = -x_i^*.$$

Dal Lemma di Hotelling derivano alcune proprietà della funzione di profitto:

1. la funzione di profitto deve essere differenziabile in p e w_i per $\forall\ i$;
2. il profitto è una funzione non decrescente rispetto al prezzo perché la quantità prodotta/offerta non diminuisce;
3. il profitto è una funzione non crescente rispetto al prezzo dell'i-esimo input perché la quantità domandata dello stesso non può aumentare se il suo costo aumenta;
4. la funzione di profitto è linearmente omogenea nei prezzi $(\mathbf{w}, p)$, infatti
$$\Pi(t \cdot \mathbf{w}, t \cdot p) = t \cdot p \cdot y^* - t \cdot \mathbf{w}'\mathbf{x}^* = t \cdot p \cdot y^* - \mathbf{w}'\mathbf{x}^* = p \cdot \Pi(\mathbf{w}, p);$$
5. la funzione di profitto è convessa nei prezzi dei fattori produttivi, infatti
$$\frac{\partial^2 \Pi(\mathbf{w}, p)}{\partial w_i^2} = -\frac{\partial x_i^*}{\partial w_i}.$$
Da questo risultato emerge anche che la matrice delle derivate seconde della funzione di profitto coincide con la matrice delle derivate della domanda di input rispetto ai prezzi degli input stessi.

2.3 Dualità

Data una tecnologia rappresentata dalla funzione di produzione $f(\mathbf{x})$, l'impresa ha l'obiettivo di minimizzare la sua funzione di costo, quindi deve risolvere il problema di programmazione matematica di cui alla (31).

Il principio di dualità afferma che è possibile che il processo di cui alla (31) può essere "invertito" attraverso il problema

$$\begin{cases} \max & f(\mathbf{x}) = y_0 \\ \text{sub} & \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x}, \end{cases} \tag{47}$$

nel quale si effettua la ricerca del massimo di $f(\mathbf{x})$ sotto il vincolo costituito dalla funzione di costo. Ciò significa che l'informazione contenuta nella funzione di costo è la stessa che si trova all'interno della funzione di produzione e viceversa.

In termini analitici è perciò possibile, sotto opportune condizioni di regolarità[10] derivare un'unica funzione di produzione che genera una funzione di costo. Sotto le stesse condizioni è possibile anche l'operazione inversa.

Nel prossimo capitolo si mostrerà che alcuni tipi di funzioni di produzione sono auto-duali, cioè sottointendono una funzione di costo con la loro stessa forma funzionale.

3 Forme funzionali

La scelta di un'opportuna forma funzionale per la funzione di produzione o per la funzione di costo costituisce un elemento fondamentale per qualsiasi modello di microeconomia. In estrema sintesi, tali forme funzionali dovrebbero avere due caratteristiche: da un lato, esse dovrebbero essere definite in modo tale da possedere le proprietà discusse nelle precedenti sezioni (omogeneità, omoteticità, convessità/concavità ecc.). Dall'altro, la loro forma analitica dovrebbe permettere lo svolgimento di analisi empiriche e/o l'utilizzo di tecniche statistico-econometriche.

In microeconomia, le forme funzionali vengono generalmente suddivise in due macro categorie, ovvero le forme funzionali **rigide** e le forme funzionali **flessibili**. Il criterio distintivo è l'elasticità di sostituzione tra le variabili che ne costituiscono il dominio: se per qualsiasi coppia (x_i, x_j), con $i \neq j$, l'elasticità di sostituzione non varia, allora si parla di rigidità. Nel caso contrario, ovvero di un'elasticità che dipende da i e j, si parla di flessibilità.

[10] Le condizioni di regolarità per $f(\mathbf{x})$ sono quelle enunciate nel paragrafo 1.2.

3.1 Forme funzionali rigide

Oggetto dei prossimi sottoparagrafi sono la forma funzionale di tipo Cobb-Douglas e di tipo CES, due espressioni caratterizzate dal fatto che l'elasticità di sostituzione tra due generici input x_i e x_j è costante per $\forall\ i \neq j$.

3.1.1 Cobb-Douglas

Dato un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, la funzione di tipo Cobb-Douglas è data dall'espressione

$$y = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \tag{48}$$

dove $A > 0$ è una costante moltiplicativa, mentre i coefficienti $\alpha_i \geq 0$ sono detti coefficienti tecnici. La funzione di tipo Cobb-Douglas gode delle seguenti proprietà:

1. funzione omogenea di grado $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, cioè

$$y(t \cdot \mathbf{x}) = t^k y(\mathbf{x}). \tag{49}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\begin{aligned} y(t \cdot \mathbf{x}) &= A \prod_{i=1}^{n} (t \cdot x_i)^{\alpha_i} \\ &= t^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\ &= t^k y(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

In riferimento all'equazione (21), il parametro k indica l'elasticità di scala, quindi

- se $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ i rendimenti di scala sono costanti,
- se $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > 1$ i rendimenti di scala sono crescenti,
- se $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$ i rendimenti di scala sono decrescenti;

2. funzione non decrescente nelle variabili x_j;

<u>*Dimostrazione:*</u>

Derivando la Cobb-Douglas rispetto alla variabile x_j si ottiene

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \alpha_j x_j^{\alpha_j - 1} A \prod_{i=1, i\neq j}^{n} x_i^{\alpha_i} = \frac{\alpha_j}{x_j} A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \frac{\alpha_j}{x_j} y \geq 0$$

---

3. funzione concava rispetto alle variabili x_j se e solo se $0 \leq \alpha_j \leq 1$;

Dimostrazione:

Il generico elemento posto lungo la diagonale della matrice Hessiana derivata rispetto alla j-esima variabile è

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2} = \alpha_j \left[-\frac{1}{x_j^2} y + \frac{\alpha_j}{x_j^2} y \right] = \alpha_j \frac{\alpha_j - 1}{x_j^2} y.$$

A questo punto è evidente che la concavità dipende strettamente dalla condizione $0 \le \alpha_j \le 1$ per la quale risulta $(\alpha_j - 1) \le 0$ per $\forall\ j$: in questo caso, la matrice Hessiana risulta (almeno) semidefinita negativa, quindi la funzione di costo di tipo Cobb-Douglas è concava.

---

4. l'elasticità di sostituzione è costante pari a $\sigma = 1$ per qualsiasi coppia di variabili (x_i, x_j);

Dimostrazione:

Nella Cobb-Douglas il SMST è dato dalla seguente espressione

$$\mathrm{SMST}(x_i, x_j) = -\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i},$$

quindi risulta

$$\frac{x_j}{x_i} = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\mathrm{SMST}(x_i, x_j).$$

Passando al logaritmo si ha

$$\ln\frac{x_j}{x_i} = \ln\frac{\alpha_j}{\alpha_i} + \ln|\mathrm{SMST}|(x_i, x_j).$$

L'elasticità di sostituzione vale perciò

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln(x_j/x_i)}{\partial \ln|\mathrm{SMST}|(x_i, x_j)} = 1$$

per ogni i, j.

---

5. il sentiero (o linea) di espansione dell'impresa è una retta passante per l'origine;

Dimostrazione:

Poiché la condizione di equilibrio per ciascuna coppia di input x_i e x_j è

$$|\mathrm{SMST}(x_i, x_j)| = \frac{p_i}{p_j},$$

dove p_i e p_j sono rispettivamente i prezzi dei fattori produttivi stessi, allora risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\frac{x_j}{x_i} &= \frac{p_i}{p_j} \\
x_j &= \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\frac{p_i}{p_j} x_i \\
x_j &= c\ x_i
\end{aligned}$$

---

6. funzione auto-duale: per un'impresa che cerca la combinazione ottimale degli input in modo da minimizzare il costo totale sotto il vincolo di una funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas, risulta che anche la sua funzione di costo è una Cobb-Douglas;

Dimostrazione:

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min \quad \mathrm{C}(\mathbf{w},y) = \mathbf{w}'\mathbf{x} \\ \\ \text{sub} \quad y = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \end{cases}$$

per il quale il Lagrangiano vale

$$L(\mathbf{x},\lambda) = \mathbf{w}'\mathbf{x} - \lambda\left(A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} - y\right).$$

Dalle condizioni del primo ordine che scaturiscono derivando la funzione $L(\mathbf{x},\lambda)$ rispetto a ciascun input x_i si ottiene

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_i} = w_i - \lambda\left(\frac{\alpha_i}{x_i}A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\right)$$

dalla quale è possibile calcolare agevolmente il valore del rapporto tra i prezzi di due generici input x_i e x_j data da

$$\frac{w_j}{w_i} = \frac{\alpha_j x_i}{\alpha_i x_j}$$

da cui deriva

$$x_i = \frac{\alpha_i}{w_i}\frac{w_j}{\alpha_j}x_j.$$

Sostituendo all'interno della funzione di produzione si ha

$$\begin{aligned} y &= A\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{w_i}\frac{w_j}{\alpha_j}x_j\right)^{\alpha_i} \\ &= Ax_j^k\left(\frac{w_j}{\alpha_j}\right)^k\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{w_i}\right)^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Esplicitando per x_j si ottiene la domanda condizionale del fattore produttivo j-esimo data da

$$x_j = y^{1/k}\frac{\alpha_j}{w_j}A^{-1/k}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i/k}.$$

Sostituendo questa l'espressione per x_j nella funzione obiettivo, si determina una funzione di costo di tipo Cobb-Douglas, infatti

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(\mathbf{w},y) &= \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i\frac{\alpha_i}{w_i}\frac{w_j}{\alpha_j}x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\alpha_j}{w_j}y^{1/k}\frac{w_j}{\alpha_j}A^{-1/k}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i/k} \\ &= k\cdot y^{1/k}A^{-1/k}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i/k} \end{aligned}$$

Ponendo $B = k\cdot A^{-1/k}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{-\alpha_i/k}$, risulta

$$\mathrm{C}(\mathbf{w},y) = y^{1/k}B\prod_{i=1}^{n} w_i^{\alpha_i/k}.$$

---

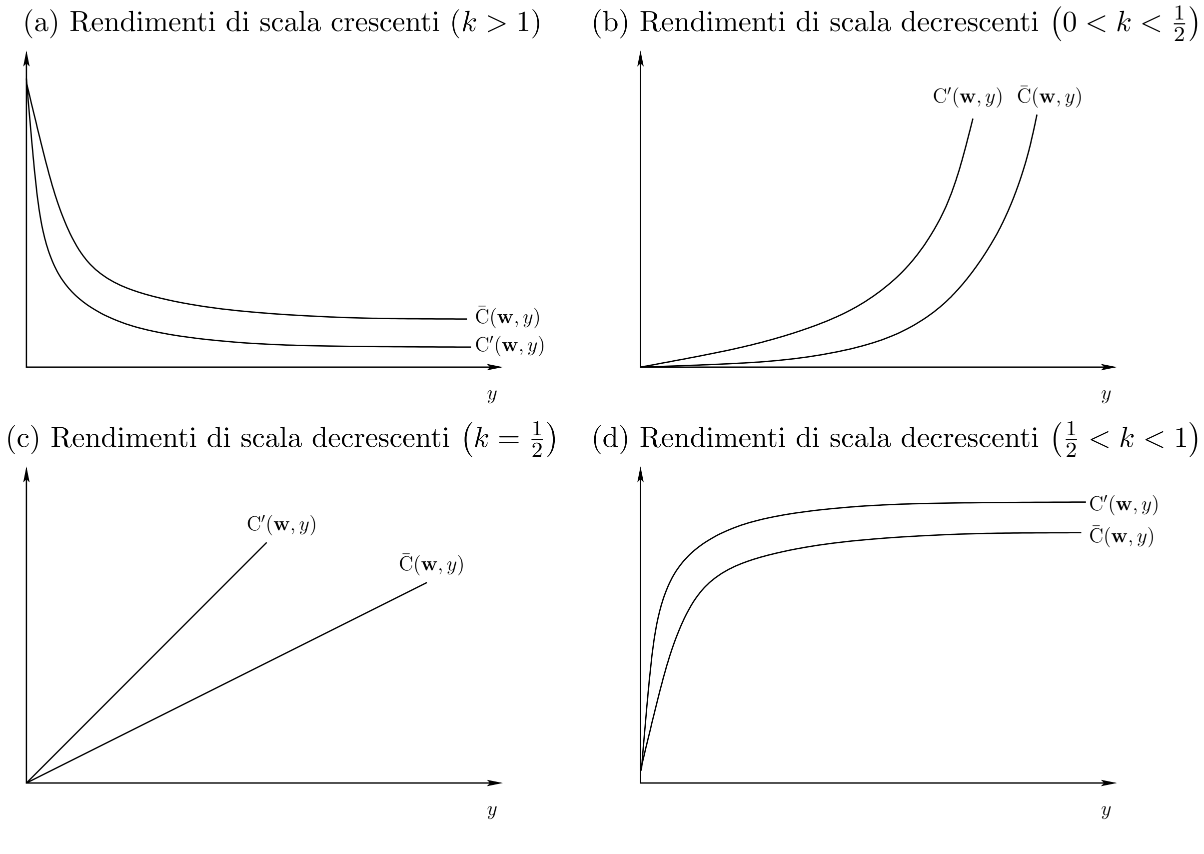
7. dall'auto-dualità della funzione di tipo Cobb-Douglas derivano i seguenti scenari in termini di funzioni di costo e di rendimenti di scala: dato che la funzione di costo può essere scomposta nel prodotto
$$\mathrm{C}(\mathbf{w},y) = \Gamma(\mathbf{w})y^{1/k},$$

dove $\Gamma(\mathbf{w}) = B \prod_{i=1}^{n} w_i^{\alpha_i/k}$ è funzione esclusiva del vettore $\mathbf{w}$, allora risulta che le funzioni

$$\begin{cases} \bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y) = \dfrac{y^{1/k}\Gamma(\mathbf{w})}{y} = \Gamma(\mathbf{w})y^{\frac{1-k}{k}} \\ \\ \mathrm{C}'(\mathbf{w}, y) = \dfrac{\partial y^{1/k}\Gamma(\mathbf{w})}{\partial y} = \dfrac{1}{k}\Gamma(\mathbf{w})y^{\frac{1-k}{k}} \end{cases} \tag{50}$$

sono anch'esse di tipo Cobb-Douglas. Si noti che i risultati ottenuti sono conformi alla relazione (35). Poiché il parametro k indica il tipo di rendimenti di scala, in caso di rendimenti costanti ($k = 1$) le due curve sono costanti e coincidono, cioè vale $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \bar{\mathrm{C}}(\mathbf{w}, y) = \Gamma(w)$; gli scenari alternativi sono rappresentati in Figura 3;

Figura 3: Funzione Cobb-Douglas e rendimenti di scala



8. funzione lineare nei logaritmi, cioè vale

$$\ln y = \ln A + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i. \tag{51}$$

Questa formulazione rende la Cobb-Douglas adatta ad analisi econometriche basate sul modello lineare classico di regressione (OLS) poiché è riconducibile alla forma

$$\tilde{y} = \tilde{A} + \alpha_i \tilde{x}_1 + \alpha_2 \tilde{x}_2 + \ldots + \alpha_n \tilde{x}_n + \varepsilon$$

per la quale è sufficiente soltanto assumere la validità delle ipotesi classiche sul termine di errore ε. In quest'ambito, possono essere ottenute stime consistenti per i coefficienti tecnici α_i e testarne successivamente la loro positività/azzeramento. Infine è altresì testabile la presenza di rendimenti costanti di scala imponendo l'ipotesi nulla

$$H_0 : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

3.1.2 Elasticità di sostituzione costante (CES)

Dato il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+$ e lo scalare y relativo all'output d'impresa, la funzione di tipo *Constant Elasticity of Substitution*, o semplicemente CES, è data dall'espressione

$$y = A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{k/\rho}, \tag{52}$$

dove dove A è una costante moltiplicativa, $\rho \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ è il parametro relativo all'elasticità di sostituzione, k è l'elasticità di scala ed i coefficienti tecnici $\beta_i \geq 0$ rispettano la condizione

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1.$$

La funzione di tipo CES gode delle seguenti proprietà:

1. funzione omogenea di grado k, cioè

$$y(t \cdot \mathbf{x}) = t^k y(\mathbf{x}); \tag{53}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} y(t \cdot \mathbf{x}) &= A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i (t \cdot x_i)^{\rho} \right]^{k/\rho} \\ &= A \left[t^{\rho} \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{k/\rho} \\ &= t^k A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{k/\rho} \\ &= t^k y(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda i rendimenti di scala valgono esattamente gli stessi discorsi fatti per la Cobb-Douglas a pag. 26;

2. funzione non decrescente nelle variabili x_j;

Dimostrazione:

Derivando la Cobb-Douglas rispetto alla variabile x_j si ottiene

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = A \frac{k}{\rho} \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{\frac{k}{\rho} - 1} \rho \beta_j x_j^{\rho - 1} = k \cdot \beta_j x_j^{\rho - 1} y \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{-1} \geq 0$$

---

3. funzione concava rispetto alla j-esima variabile;

Dimostrazione:

Dopo un po' di algebra, il generico elemento posto lungo la diagonale della matrice Hessiana derivata rispetto alla j-esima variabile è

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j} = k \cdot A\beta_j x^{\rho-2} \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^\rho\right]^{\frac{k}{\rho}-1} \left\{\rho - 1 + (k-\rho)\beta_j x_j^\rho \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^\rho\right]^{-1}\right\}.$$

Il segno del fattore tra parentesi graffe determina il segno della derivata, quindi deve risultare

$$\frac{\beta_j x_j^\rho}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^\rho} \leq \frac{1-\rho}{k-\rho},$$

dove il rapporto alla sinistra del segno di disuguaglianza ha valore compresso nell'intervallo $[0,1]$. La discussione perciò dipende dal valore dell'elasticità di scala, infatti

- se i rendimenti di scala non sono crescenti ($k \leq 1$) risulta $\dfrac{1-\rho}{k-\rho} \geq 1$, quindi la disuguaglianza è sempre verificata e la $y(\mathbf{x})$ è concava,
- se i rendimenti di scala sono crescenti ($k > 1$), risulta $0 < \dfrac{1-\rho}{k-\rho} < 1$, quindi risolvere la disuguaglianza analiticamente diventa piuttosto difficile. Tuttavia, dal punto di vista numerico si può affermare che essa risulta verificata quando $k \to 1^+$ e/o $\rho \to -\infty$.

---

4. l'elasticità di sostituzione è costante pari a $\sigma = \dfrac{1}{1-\rho}$ per qualsiasi coppia di variabili (x_i, x_j);

Dimostrazione:

Nella CES il SMST è dato dalla seguente espressione

$$\text{SMST}(x_i, x_j) = -\frac{\beta_i}{\beta_j}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{\rho-1}$$

quindi risulta

$$\frac{x_j}{x_i} = -\left(\frac{\beta_j}{\beta_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \text{SMST}(x_i, x_j)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

Passando al logaritmo si ha

$$\ln\frac{x_j}{x_i} = \frac{1}{1-\rho}\ln\frac{\beta_j}{\beta_i} + \frac{1}{1-\rho}\ln|\text{SMST}(x_i, x_j)|$$

L'elasticità di sostituzione vale perciò

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln(x_j/x_i)}{\partial \ln|\text{SMST}(x_i, x_j)|} = \frac{1}{1-\rho}$$

per ogni i, j.

---

5. il sentiero (o linea) di espansione dell'impresa è una retta passante per l'origine;

Dimostrazione:

Data la condizione di equilibrio per ciascuna coppia di input x_i e x_j è

$$|\text{SMST}(x_i, x_j)| = \frac{p_i}{p_j},$$

dove p_i e p_j sono rispettivamente i prezzi dei fattori produttivi, allora risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_i}{\beta_j}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{\rho-1} &= \frac{p_i}{p_j} \\
\left(\frac{x_j}{x_i}\right)^{\rho-1} &= \frac{\beta_j}{\beta_i}\frac{p_i}{p_j} \\
x_j^{\rho-1} &= \frac{\beta_j}{\beta_i}\frac{p_i}{p_j}{x_i}^{\rho-1} \\
x_j &= \left(\frac{\beta_i}{\beta_j}\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} x_i \\
x_j &= c\; x_i
\end{aligned}$$

---

6. la Cobb-Douglas è un caso particolare della funzione di tipo CES: in particolare, risulta

$$\lim_{\rho\to 0} A\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}\right]^{k/\rho} = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \tag{54}$$

con $\alpha_i = k\beta_i$.

Dimostrazione:

Quando il parametro ρ è nullo la funzione di tipo CES non è definita, ma esiste il suo limite che risulta essere la funzione di tipo Cobb-Douglas, quindi[11]

$$\lim_{\rho\to 0} A\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}\right]^{k/\rho} = \ln A + \lim_{\rho\to 0}\frac{k}{\rho}\ln\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}\right].$$

Applicando la regola di Hôpital, si ottiene

$$\ln A + \lim_{\rho\to 0} k\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}\ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}} = \ln A + k\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ln x_i$$

poiché $x_i^{\rho}\to 1$, quindi $\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{\rho}\to 1$.

Questa espressione corrisponde al logaritmo di una Cobb-Douglas con parametri $\alpha_i = k\beta_i$ $\left(\text{quindi } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = k\right)$, infatti

$$\exp\left\{\ln A + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i\right\} = A\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

Dal punto di vista dell'elasticità di sostituzione è eviedente che, quando $\rho\to 0$, risulta $\sigma = 1$ che corrisponde all'elasticità di sostituzione calcolata attraverso la Cobb-Douglas;

[11] Questa proprietà della CES è ottenuta attuando lo stesso procedimento che in statistica descrittiva calcola la media geometrica come limite della funzione della media potenziata di ordine r quando $r\to 0$.

7. la tecnologia con proporzioni fisse (Leontief) è un caso particolare della funzione di tipo CES, cioè

$$\lim_{\rho \to -\infty} A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{k/\rho} = A \cdot \min\{x_i^k\} \tag{55}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Ipotizzando che il j-esimo input sia quello utilizzato in quantità minima, analiticamente si ha $x_j = \min\{x_i\}$, quindi risulta $x_i/x_j > 1$ per $\forall\, i$. Portando x_j fuori dalle parentesi e calcolando il limite per $\rho \to -\infty$, la soluzione è immediata, infatti

$$\lim_{\rho \to -\infty} A \cdot x_j^k \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(\frac{x_i}{x_j} \right)^{\rho} \right]^{k/\rho} = \lim_{\rho \to -\infty} A \cdot x_j^k \beta_j^{k/\rho} = A \cdot \min\{x_i^k\},$$

poiché $\dfrac{x_i}{x_j} \to 0$ per ogni $i \neq j$ e $\dfrac{k}{\rho} \to 0$.

In sintesi, dalle proprietà 4.-5.-6. emerge che, nella CES, l'elasticità si sostituzione tra due input x_i e x_j dipende dai valori a assunti dal parametro ρ, infatti
- se $\rho \to -\infty$ $\Rightarrow$ $\sigma = 0$ $\Rightarrow$ x_i e x_j perfettamente complementari (Leontief),
- se $\rho < 0$ $\Rightarrow$ $0 < \sigma < 1$ $\Rightarrow$ x_i e x_j complementari,
- se $\rho \to 0$ $\Rightarrow$ $\sigma = 1$ $\Rightarrow$ funzione Cobb-Douglas,
- se $0 < \rho < 1$ $\Rightarrow$ $\sigma > 1$ $\Rightarrow$ x_i e x_j sostituti,
- se $\rho = 1$ $\Rightarrow$ $\sigma \to \infty$ $\Rightarrow$ x_i e x_j perfetti sostituti.

8. funzione auto-duale: per un'impresa che cerca la combinazione ottimale degli input in modo da minimizzare il costo totale sotto il vincolo di una funzione di produzione di tipo CES, risulta che anche la sua funzione di costo è una CES;

<u>*Dimostrazione:*</u>

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \min & \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \mathbf{w}'\mathbf{x} \\ \text{sub} & y = A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{k/\rho} \end{cases}$$

per il quale il Lagrangiano vale

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{w}'\mathbf{x} - \lambda \left(A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{k/\rho} - y \right).$$

Dalle condizioni del primo ordine che scaturiscono derivando la funzione $L(\mathbf{x}, \lambda)$ rispetto a ciascun input x_j si ottiene

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} = w_j - \lambda \cdot k \cdot A \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho} \right]^{\frac{k}{\rho} - 1} \beta_j x_j^{\rho - 1}$$

dalla quale è possibile calcolare agevolmente il valore del rapporto tra i prezzi di due generici input x_i e x_j data da

$$\frac{w_j}{w_i} = \frac{\beta_j}{\beta_i} \left(\frac{x_i}{x_j} \right)^{1-\rho}$$

da cui deriva

$$x_i = \left(\frac{\beta_i}{w_i} \frac{w_j}{\beta_j} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} x_j.$$

Sostituendo all'interno della funzione di produzione si ha

$$
\begin{aligned}
y &= A\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{\beta_i}{w_i}\frac{w_j}{\beta_j}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}}x_j^{\rho}\right]^{k/\rho} \\
&= A\left(\frac{w_j}{\beta_j}\right)^{\frac{k}{1-\rho}}x_j^k\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i w_i^{-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\right]^{k/\rho}.
\end{aligned}
$$

Esplicitando per x_j si ottiene la domanda condizionale del fattore produttivo j-esimo data da

$$
x_j = y^{1/k}A^{-1/k}\left(\frac{\beta_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i w_i^{-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\right]^{-k/\rho}.
$$

Sostituendo questa l'espressione per x_j nella funzione obiettivo, si determina una funzione di costo di tipo CES, infatti

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(\mathbf{w},y) &= \sum_{i=1}^{n}w_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}w_i\left(\frac{\beta_i}{w_i}\frac{w_j}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i w_i^{-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{w_j}{\beta_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}y^{1/k}A^{-1/k}\left(\frac{\beta_j}{w_j}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i w_i^{-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\right]^{-k/\rho} \\
&= y^{1/k}A^{-1/k}\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i w_i^{-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i w_i^{-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\right]^{-k/\rho} \\
&= y^{1/k}A^{-1/k}\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i^{\frac{1}{1-\rho}}w_i^{-\frac{\rho}{1-\rho}}\right]^{-\frac{1-\rho}{\rho}}
\end{aligned}
$$

Ponendo $B = A^{-1/k}$, $\sigma = \dfrac{1}{1-\rho}$, $\eta = -\rho\sigma$ e $\theta_i = \beta_i^{\sigma}$, risulta

$$
\mathrm{C}(\mathbf{w},y) = y^{1/k}B\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i w_i^{-\eta}\right]^{-\frac{1}{\eta}}. \tag{56}
$$

---

9. anche nel caso della CES la funzione di costo può essere scomposta come

$$
\mathrm{C}(\mathbf{w},y) = \Gamma(\mathbf{w})y^{1/k},
$$

dove $\Gamma(\mathbf{w}) = B\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i w_i^{-\eta}\right]^{-\frac{1}{\eta}}$ è funzione esclusiva del vettore $\mathbf{w}$.
Per quanto riguarda le curve di costo marginale e di costo medio valgono perciò le stesse considerazioni fatte per la Cobb-Douglas.

3.2 Forme funzionali flessibili

Le forme funzionali flessibili impongono minori restrizioni rispetto alle forme funzionali rigide, quindi permettono la verifica di un maggior numero di ipotesi circa i loro parametri. Come già anticipato, per quanto riguarda questo tipo di funzioni l'elasticità di sostituzione a non è costante per ciascuna coppia di variabili (x_i, x_j).

3.2.1 CES a più stadi (cenni)

Proposta da Uzawa (1962), la funzione di tipo CES a più stadi o annidata (*nested* CES) è una forma funzionale flessibile costruita su più forme funzionali rigide. In particolare, l'idea è quella di costruire una funzione di tipo CES utilizzando variabili che sono anch'esse costruite attraverso funzioni di tipo CES. Per semplicità, si ipotizzi che esista un regime "a 2 stadi" tali per cui risulta[12]

$$\begin{cases} y = B\left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j c_j(\mathbf{x})^{\rho_0}\right]^{k_1/\rho_0} \\ \\ c_j(\mathbf{x}) = A\left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i^{\rho_j}\right]^{k_2/\rho_j} \end{cases}, \tag{57}$$

dove le variabili $c_j(\mathbf{x})$ sono funzioni CES costruite sul vettore $\mathbf{x}$, mentre k_s con $s = 1, 2$ rappresenta il valore dell'elasticità di scala nei diversi stadi. L'equazione (57) presuppone la **separabilità in forma debole** cioè l'elasticità di sostituzione tra una qualsiasi coppia di elementi del vettore $c(\mathbf{x}) = [c_1(\mathbf{x}) \quad c_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad c_m(\mathbf{x})]'$ è

$$\sigma_c = \frac{1}{1-\rho_0},$$

mentre l'elasticità di sostituzione tra una qualsiasi coppia di elementi del vettore $\mathbf{x}$ è

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\rho_j}.$$

In pratica, attraverso le funzioni di tipo CES a più stadi è possibile imporre un'elasticità di sostituzione fissa per le variabili appartenenti ad ogni singolo stadio che però sono diverse dalle elasticità di sostituzione in altri stadi. È ovvio che, aumentando il numero di stadi, la numerosità dei diversi valori di elasticità di sostituzione aumenta in ragione esponenziale. Per questo motivo, la CES annidata viene generalmente impiegata per 2 o al massimo 3 stadi, nonché per un numero esiguo di variabili incluse nel vettore $\mathbf{x}$ (di solito $n = 2$ variabili).

Le proprietà della CES a più stadi ricalcano sostanzialmente quelle della funzione di tipo CES elencate nella sezione 3.1.2, con le naturali complicazioni di tipo algebrico/computazionale che comporta un crescente livello di generalità della funzione; una caratteristica interessante è che l'omogeneità della funzione dipende dal numero degli stadi (S), infatti, applicando ad ogni stadio la proprietà di cui alla (53), risulta

$$y(t \cdot \mathbf{x}) = t^K y(\mathbf{x}), \tag{58}$$

dove

$$K = \prod_{s=1}^{S} k_s.$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Questa dimostrazione si basa sulla proprietà di omogeneità delle funzioni di tipo CES; in relazione all'equazione (57) in cui $S = 2$ si avrebbe perciò che $c(t \cdot \mathbf{x}) = t^{k_2} c(\mathbf{x})$, quindi

$$y(t^{k_2} \cdot \mathbf{x}) = (t^{k_2})^{k_1} y(\mathbf{x}) = t^{k_2 \cdot k_1} y(\mathbf{x}).$$

Generalizzando per $S > 2$, si ottiene perciò la (58).

Dalla (58) emerge inoltre che, se $k_s = 1$ per ogni $s = 1, 2, \dots, S$, allora la funzione CES a più stadi è linearmente omogenea ($K = 1$).

[12]Ovviamente è possibile generalizzare la funzione annidando più di due funzioni di tipo CES.

3.2.2 Translogaritmica

La forma funzionale logaritmica trascendentale o translogaritmica, più comunemente denominata *translog* risponde alla necessità di definire una forma funzionale più generale e flessibile rispetto alle funzioni di tipo CES, ma nello stesso tempo rappresenta una valida approssimazione per le stesse. Essa perciò si configura sostanzialmente come una formula di Taylor fino al secondo ordine per i logaritmi della variabile dipendente e delle variabili esplicative contenute all'interno del vettore $\mathbf{x}$ ed è caratterizzata dal fatto che tutte le elasticità parziali di sostituzione possono assumere valori tra loro differenti. La sua forma analitica, formalizzata per la prima volta da Christiansen, Jorgenson e Lau (1971, 1973), è

$$\tilde{y} = \tilde{A} + \mathbf{a}'\tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{b}'\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{b}, \tag{59}$$

dove $\tilde{y} = \ln y$, $\tilde{A} = \ln A$ e $\tilde{\mathbf{x}} = [\ln x_1 \quad \ln x_2 \quad \dots \quad \ln x_n]'$.

Esplicitando con le sommatorie si ottiene perciò

$$\ln y = \ln A + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln x_i \ln x_j, \tag{60}$$

dove i coefficienti b_{ij} corrispondono all'elemento posto all'incrocio dell'i-esima riga e della j-esima colonna della matrice simmetrica $\mathbf{bb}'$ (quindi $b_{ij} = b_{ji}$ per ogni $i \neq j$).

La funzione translog gode delle seguenti proprietà:

1. la Cobb-Douglas rappresenta il caso particolare della translog in cui $b_{ij} = 0$;

2. la funzione $y(\mathbf{x})$ è omogenea di grado k solo sotto le condizioni

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = k \qquad \text{e} \qquad b_i = \mathbf{1}'\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 0, \tag{61}$$

dove $\mathbf{1}' = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$ è il vettore-somma;

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\begin{aligned}
\ln y(t\cdot\mathbf{x}) &= \ln A + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(t\cdot x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ln(t\cdot x_i)\ln(t\cdot x_j)\\
&= \ln A + \sum_{i=1}^{n} a_i[\ln t + \ln x_i] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}[\ln t + \ln x_i][\ln t + \ln x_j]\\
&= \ln A + \sum_{i=1}^{n} a_i[\ln t + \ln x_i] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}[\ln^2 t + \ln t(\ln x_i + \ln x_j) + \ln x_i \ln x_j]\\
&= \ln A + \ln t\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ln x_i \ln x_j + \frac{1}{2}\left\{\ln^2 t\sum_{i=1}^{n} b_i + 2\ln t\sum_{i=1}^{n} b_i \ln x_i\right\}
\end{aligned}$$

dove $b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$. Sotto le condizioni (61) risulta

$$\ln y(t\cdot\mathbf{x}) = \ln A + k\ln t + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ln x_i \ln x_j$$

quindi

$$y(t\cdot\mathbf{x}) = t^k A\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\ln x_i \ln x_j\right\} = t^k y(\mathbf{x})$$

---

3. il segno delle derivate dipende dai parametri, infatti il gradiente è

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b}'\tilde{\mathbf{x}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i} = a_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln x_j$$

   e

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{\mathbf{x}} \partial \tilde{\mathbf{x}}'} = \mathbf{b}\mathbf{b}' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} = b_{ij},$$

   quindi, in pratica, b_{ij} rappresenta l'elemento della matrice Hessiana posto all'incrocio tra l'i-esima riga e la j-esima colonna. Affinché la funzione translog sia concava occorre che la matrice $\mathbf{b}\mathbf{b}'$ sia almeno semidefinita negativa;

4. in alcuni testi di econometria come ad esempio Berndt (1991) oppure Takayama (1994), la forma funzionale translog viene presentata direttamente attraveso una funzione di costo del tipo

$$\begin{aligned} \ln \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) &= \ln A + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ln w_i \ln w_j + a_y \ln y + \\ &+ \frac{1}{2} a_{yy} \ln^2 y + \sum_{i=1}^{n} b_{iy} \ln y \ln w_i \end{aligned} \tag{62}$$

   da quale è possibile ricavare agevolmente due importanti proprietà:

   - La factor share relativa al fattore produttivo i-esimo è lineare nei logaritmi di w_i, quindi si ha

$$S_i = a_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \ln w_j + b_{iy} \ln y, \tag{63}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Poiché la factor share per l'i-esimo input è

$$S_i = \frac{w_i x_i}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)},$$

applicando il Lemma di Shephard risulta

$$S_i = \frac{1}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} w_i.$$

Calcolando il differenziale di $\ln w_i$ si ha

$$d \ln w_i = \frac{\partial \ln w_i}{\partial w_i} dw_i = \frac{dw_i}{w_i}$$

quindi il prezzo dell'i-esimo input è esprimibile come

$$w_i = \frac{dw_i}{d \ln w_i}.$$

Sostituendo all'interno dell'equazione relativa alla factor share risulta

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{w_i x_i}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} \frac{dw_i}{d \ln w_i} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} \\ &= \frac{1}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{d \ln w_i} \\ &= \frac{\partial \ln \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{d \ln w_i} \\ &\approx \frac{\partial \ln \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial \ln w_i}. \end{aligned}$$

Nel caso dell'equazione (62) si ha quindi

$$S_i = \frac{\partial \ln \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial \ln w_i} = a_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \ln w_j + b_{iy} \ln y$$

- l'elasticità di sostituzione varia a seconda della coppia delle variabili implicate, poiché vale

$$\sigma_{ij} = 1 + \frac{b_{ij}}{S_i S_j}, \tag{64}$$

dove S_i e S_j sono rispettivamente la factor share relativa all'i-esima e alla j-esima variabile;

<u>*Dimostrazione:*</u>

Si consideri l'elasticità parziale di sostituzione calcolata in base alle funzioni di costo di cui alla (44), cioè

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{C}_{ij}}{\mathrm{C}_i \mathrm{C}_j} \mathrm{C}(\mathbf{w}, y);$$

applicando il Lemma di Shephard rispetto alla variabile i-esima (per la j-esima vale esattamente la stessa relazione) si ha

$$\mathrm{C}_i = \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} = x_i = \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i} S_i.$$

Per la funzione C_{ij} risulta

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{ij} &= \frac{\partial\ \mathrm{C}_i}{\partial w_j} \\
&= \frac{\partial \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i} S_i}{\partial w_j} \\
&= \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_j} \frac{S_i}{w_i} + \frac{\partial S_i}{\partial w_j} \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i}
\end{aligned}$$

Poiché dalla (63) risulta $\frac{\partial S_i}{\partial w_j} = \frac{b_{ij}}{w_j}$, allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{ij} &= x_j \frac{S_i}{w_i} + \frac{b_{ij}}{w_j} \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i} \\
&= \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i w_j} \left[x_j \frac{S_i}{w_i} \frac{w_i w_j}{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)} + b_{ij} \right] \\
&= \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i w_j} \left[S_i S_j + b_{ij} \right].
\end{aligned}$$

L'elasticità di sostituzione vale perciò

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\mathrm{C}_{ij}}{\mathrm{C}_i \mathrm{C}_j} \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) \\
&= \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i w_j} \left[S_i S_j + b_{ij} \right] \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_i} S_i \frac{\mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{w_j} S_j} \\
&= \frac{S_i S_j + b_{ij}}{S_i S_j} \\
&= 1 + \frac{b_{ij}}{S_i S_j}
\end{aligned}$$

---

5. funzione lineare nei logaritmi, quindi la translog può essere comodamente utilizzata nell'ambito di analisi econometriche basate sul modello lineare classico di regressione. Anche in questo, come per la Cobb-Douglas, è sufficiente assumere la validità delle ipotesi classiche sul termine di errore del modello. Inoltre è possibile condurre qualsivoglia test statistico sui parametri contenuti nel vettore $\mathbf{a}$ e/o nella matrice $\mathbf{bb}'$.

3.2.3 Diewert

La forma funzionale Diewert è anch'essa flessibile in quanto l'elasticità di sostituzione non è la stessa per tutte le coppie di input. La sua forma analitica è

$$y = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sqrt{x_i x_j} \right]^k \tag{65}$$

dove k è l'elasticità di scala e vale sempre la simmetria $b_{ij} = b_{ji}$.

La funzione di tipo Diewert gode delle seguenti proprietà:

1. funzione omogenea di grado k, cioè $y(t \cdot \mathbf{x}) = t^k y(\mathbf{x})$;

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\begin{aligned} y(t \cdot \mathbf{x}) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sqrt{t \cdot x_i \cdot t \cdot x_j} \right]^k \\ &= t^k \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sqrt{x_i x_j} \right]^k \\ &= t^k y(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

---

2. utilizzando anche in questo caso la funzione di costo[13]

$$\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = y \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sqrt{w_i w_j}, \tag{66}$$

dal Lemma di Shephard si ottiene la funzione della domanda condizionale del fattore i-esimo

$$x_i = y \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \sqrt{\frac{w_j}{w_i}}. \tag{67}$$

Quando $i = j$ il rapporto tra i prezzi degli input è pari a 1, quindi il coefficente b_{ii} è costante nell'espressione di x_i.

3. l'elasticità di sostituzione è variabile a seconda della coppia di input sulla quale è calcolata ed è proporzionale al parametro b_{ij};

<u>*Dimostrazione:*</u>

Dato che $C_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial w_j} = \dfrac{y}{2} b_{ij} (w_i w_j)^{-1/2}$, applicando il Lemma di Shephard si ottiene

$$\sigma_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_i C_j} \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \frac{y \cdot b_{ij} (w_i w_j)^{-1/2}}{2 x_i x_j} \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)$$

---

[13] Nell'equazione (66) il parametro relativo all'elasticità di scala è $k = 1$, scelta dettata da ragioni pratiche di semplicità e che non determina perdita di generalità. Anche per la Diewert vale la separabilità tale per cui risulta $\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \Gamma(\mathbf{w}) y^{1/k}$, infatti

$$\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = \left[y^{1/k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sqrt{w_i w_j} \right]^k = y \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sqrt{w_i w_j} \right]^k.$$

4. Quando $b_{ij} = 0$ per $\forall\ i \neq j$ si ottiene l'equazione della funzione di tipo **Leontief** dove la tecnologia è caratterizzata da proporzioni fisse e nell'impiego degli input. Per questo motivo la funzione Diewert è nota e anche col nome "Leontief generalizzata". La funzione di costo di tipo Leontief è

$$\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = y \sum_{i=1}^{n} b_{ii} w_i \tag{68}$$

La Leontief ha le seguenti caratteristiche:

- funzione omogenea di grado 1,
- la domanda condizionale del fattore i-esimo è costante pari a

$$x_i = \frac{\partial\ \mathrm{C}(\mathbf{w}, y)}{\partial w_i} = a_i y,$$

- l'elasticità di sostituzione è nulla per qualsiasi coppia di input (x_i, x_j), quindi tutti i fattori produttivi sono perfettamente complementari. Ciò accade perché l'isoquanto di produzione mostra un punto angoloso.

Si considerino le equazioni (52) e (56) relative rispettivamente alla funzione di produzione e quella di costo di tipo CES ottenute per l'auto-dualità; per semplificare la trattazione si ponga $k = 1$, $A = 1$ e $B = 1$. Le equazioni sono perciò

$$y = \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{\rho}\right]^{1/\rho} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = y \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{\frac{1}{1-\rho}} x_i^{-\frac{\rho}{1-\rho}}\right]^{-\frac{1-\rho}{\rho}}$$

Quando $\rho \to -\infty$ si ottengono due risultati:

(a) dalla funzione di produzione si evince che $y(x) = A \cdot \min\{x_i\}$,

(b) la quantità $-\dfrac{\rho}{\rho} \to 1$, quindi la funzione di costo tende ad una funzione del tipo (68), infatti si ha

$$\mathrm{C}(\mathbf{w}, y) = y \sum_{i=1}^{n} w_i.$$

Si noti inoltre il caso opposto, cioè quando $\rho \to 1$. La funzione di produzione è lineare

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,$$

mentre la funzione di costo diventa

$$\mathrm{C} = \min\{w_i\}$$

Da queste considerazioni emerge che la Leontief non è auto-duale.

Appendice: alcuni risultati utili

Proposizione 1 *Data una generica matrice quadrata* $\mathbf{A}$ *di dimensione* $(n \times n)$*, il suo determinante è dato dalla seguente espressione:*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|,$$

dove a_{ij} *è l'elemento posto all'incrocio dell'i-esima riga con la j-esima colonna, mentre* $|\mathbf{A}_{ij}|$ *è il* ***minore*** *di* $\mathbf{A}$*, cioè il determinante della matrice di dimensione* $(n-1)\times(n-1)$ *ottenuta dalla matrice* $\mathbf{A}$ *una volte tolte la i-esima riga e la j-esima colonna; la quantità* $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$ *è il* ***complemento algebrico*** *relativo all'i-esima riga di* $\mathbf{A}$*.*

Le proprietà del determinante sono:

1. *Se le colonne (righe) di* $\mathbf{A}$ *sono linearmente dipendenti il determinante è nullo. In questo caso* $\mathbf{A}$ *non ha rango colonna (riga) pieno, quindi non invertibile (matrice singolare);*

2. *Data una costante k risulta*
$$|k \cdot \mathbf{A}| = k^n|\mathbf{A}|;$$

3. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$ *dove* $\mathbf{A}'$ *è la matrice trasposta di* $\mathbf{A}$*;*

4. *Data* $\mathbf{B}$ *conformabile ad* $\mathbf{A}$ *risulta*
$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|;$$

5. $|I_n| = 1$ *per* $\forall\ n$*, dove* I_n *è la matrice identità di dimensione* $n \times n$*.*

Proposizione 2 *Data una generica matrice quadrata* $\mathbf{A}$ *di dimensione* $n \times n$*, la formula per il calcolo della sua inversa è*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\tilde{\mathbf{A}}',$$

dove $\tilde{\mathbf{A}}$ *è la matrice aggiunta di* $\mathbf{A}$*: ciascun elemento posto all'incrocio dell'i-esima riga con la j-esima colonna all'interno di tale matrice è il complemento algebrico di* $\mathbf{A}$*.*

Si tenga presente che, quando si deve calcolare l'aggiunta trasposta di una matrice 2×2 *basta semplicemente scambiare di posizione gli elementi sulla diagonale principale e cambiare di segno gli elementi extra-diagonali.*

Da queste definizioni deriva che il generico elemento della matrice inversa di $\mathbf{A}$ *è dato dal rapporto:*

$$\gamma_{ij} = \frac{|\mathbf{A}_{ij}|}{|\mathbf{A}|}.$$

Proposizione 3 *Data la funzione di produzione* $f(\mathbf{x})$*, dove* $\mathbf{x}$ *è il vettore contenente le quantità utilizzate relative a n distinti input, è possibile costruire la* ***matrice Hessiana bordata*** *di cui alla* (17)*. La matrice* $\mathbf{G}$ *gode delle seguenti proprietà:*

1. *matrice quadrata di dimensione* $(n+1) \times (n+1)$*;*

2. *matrice partizionata nella quale le partizioni sono rispettivamente lo scalare 0, il gradiente* $\mathbf{f}$ *ed il corrispondente vettore trasposto, la matrice delle derivate seconde* $\mathbf{H}$*;*

3. *matrice simmetrica;*

4. *matrice semidefinita negativa per la concavità di* $f(\mathbf{x})$*.*

Proposizione 4 *Sia* $\mathbf{G}$ *la matrice Hessiana bordata di* $f(x)$ *e si indichi con* $|\mathbf{G}_{ii}|$ *il suo generico minore principale, risulta che:*

- *se* $\mathbf{G}$ *è definita positiva* $\Rightarrow |\mathbf{G}_{ii}| > 0$ *per* $\forall\ i$*;*

- *se* $\mathbf{G}$ *è definita negativa* $\Rightarrow$ *i minori principali sono in successione alternata positivi e negativi.*

In quest'ultimo caso $|\mathbf{G}|$ *e* $|\mathbf{G}_{ii}|$ *sono discordi per definizione, in quanto l'ordine delle righe di* $\mathbf{G}$ *non è rilevante: in termini economici questo risultato che l'ordine di enumerazione dei fattori produttivi non ha rilevanza per il calcolo dei determinanti.*

Proposizione 5 *Per qualsiasi matrice quadrata* $\mathbf{A}$ *risulta:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{kj}| = 0$$

dove a_{ij} *è l'elemento posto all'incrocio dell'i-esima riga con la j-esima colonna, mentre* $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{kj}|$ *è il complemento algebrico relativo alla k-esima riga di* $\mathbf{A}$ *con* $k \neq i$*.*

Riferimenti bibliografici

ALLEN, R. G. (1938). *Mathematical analysis for economists.* Mac Millan, Londra.

BERNDT, E. R. (1991). *The practice of econometrics.* Addison-Wesley, Reading, Massachussets.

CARDANI, A. M. (1988). *Lezioni di teoria della produzione e della domanda.* Edizioni Unicopli, Milano.

CHRISTIANSEN, L. R., JORGENSON, D. W. E LAU, L. J. (1971). *Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function.* Econometrica, 39(4): 225–256.

— (1973). *Transcendental logarithmic production frontiers.* Review of Economics and Statistics, 55(1): 28–45.

DIEWERT, E. W. (1982). *Duality approaches to microeconomic theory.* in K.J. Arrow e M.D. Intriligator (eds.), "Handbook of mathematical economics", vol. II, North Holland, Amsterdam.

SHEPHARD, R. (1953). *Cost and production functions.* Princeton University Press, New York.

TAKAYAMA, A. (1994). *Analytical methods in economics.* Harvester Wheatsheaf, New York.

UZAWA, R. (1962). *Production functions with constant elasticity of substitution.* Review of Economic Studies, 9: 291–299.

VAGLIO, A. (2004). *Matematica per economisti.* Apogeo (Feltrinelli).

VARIAN, H. R. (1992). *Microeconomic analysis (3rd edition).* W.W. Norton & Company, New York.

Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale va ad Edoardo Baldoni che ha avuto il tempo di scovare diversi errori e/o imprecisioni in questo scritto, nonché la pazienza di segnalarmeli puntualmente.