

# Modello di simulazione per un portafoglio diversificato

Giulio Palomba

Università Politecnica delle Marche

Dipartimento di Economia

*giulio@dea.unian.it*

Maggio 2004

## Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>                                 | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Il modello analitico</b>                         | <b>3</b>  |
| 2.1      | La frontiera di portafoglio . . . . .               | 4         |
| 2.2      | Portafoglio con varianza minima . . . . .           | 5         |
| 2.3      | Portafoglio ottimo . . . . .                        | 6         |
| 2.4      | Portafoglio con due sole attività . . . . .         | 8         |
| 2.4.1    | Perfetta correlazione positiva . . . . .            | 8         |
| 2.4.2    | Perfetta correlazione negativa . . . . .            | 9         |
| 2.4.3    | Incorrelazione . . . . .                            | 11        |
| 2.5      | Vendite allo scoperto . . . . .                     | 12        |
| <b>3</b> | <b>Il modello di simulazione</b>                    | <b>14</b> |
| 3.1      | Foglio di lavoro “Dati” . . . . .                   | 14        |
| 3.2      | Foglio di lavoro “Modello” . . . . .                | 16        |
| 3.3      | Foglio di lavoro “Calcoli” . . . . .                | 17        |
| 3.4      | Foglio di lavoro “Portafogli” . . . . .             | 17        |
| 3.5      | Grafico “Frontiera” . . . . .                       | 18        |
| 3.6      | Possibili ampliamenti . . . . .                     | 18        |
|          | <b>Appendice 1: Operazioni su matrici e vettori</b> | <b>19</b> |
|          | <b>Appendice 2: Funzioni di Excel utilizzate</b>    | <b>23</b> |

# 1 Introduzione

L'obiettivo di queste pagine è quello di fornire gli strumenti tecnici ed analitici utili per costruire un file in formato Microsoft Excel in grado di poter effettuare simulazioni riguardo alla costruzione di un portafoglio diversificato. Tutte le informazioni desumibili dall'utilizzo di tale modello devono essere perciò generate in modo automatico una volta immessi alcuni dati essenziali per il suo funzionamento. I dati da immettere manualmente saranno contrassegnati da celle colorate e riguardano:

- Le varianze e dei rendimenti dei titoli
- Il valore dei coefficienti di correlazione tra i diversi titoli
- Il vettore dei rendimenti attesi dei titoli
- Il valore desiderato per il rendimento atteso di portafoglio
- Il rendimento dell'attività priva di rischio<sup>1</sup>

Una volta immessi i dati di cui sopra, il calcolatore deve fornire i valori di diverse grandezze senza richiedere eccessivi sforzi da parte dell'utente. Tali grandezze sono:

1. Il valore del rischio di portafoglio corrispondente a qualsiasi valore del rendimento atteso
2. Rischio e rendimento atteso del portafoglio con la minima varianza
3. Rischio e rendimento atteso del portafoglio ottimo
4. La curva della frontiera di portafoglio
5. La retta avente per coefficiente angolare il valore massimo ottenibile per lo Sharpe Ratio

Nel prossimo capitolo è spiegato il funzionamento del modello dal punto di vista analitico e vengono introdotte tutte le variabili ed i parametri che dovranno essere compresi nel file.

Nel capitolo 3 sono illustrati i contenuti dei diversi fogli di lavoro che si intende costruire, le funzioni di Excel utilizzate e le informazioni che si possono ottenere.

Questo lavoro si chiude con due appendici che si occupano rispettivamente di fornire alcune nozioni di algebra lineare e di illustrare le funzioni del programma Microsoft Excel utilizzate nel modello di simulazione.

---

<sup>1</sup>Per motivi legati essenzialmente alla gestibilità dal punto di vista computazionale del modello di portafoglio, in queste pagine si ipotizza che sul mercato non esista un'attività priva di rischio o che essa abbia un rendimento nullo.

## 2 Il modello analitico

Il modello analitico parte dalle ipotesi di Sharpe (1964) e Lintner (1965) relative al C.A.P.M. e ricalca sostanzialmente il modello media-varianza di Markowitz (1959) dove l'obiettivo del generico investitore è quello della minimizzazione della varianza di portafoglio sotto i vincoli di linearità tra  $\mu_p$  ed il vettore  $\mu$  e di un portafoglio pienamente investito.

Il modello che si utilizza quando si intende investire su  $n$  attività rischiose è quello illustrato nel capitolo 5 di Campbell, Lo e MacKinlay (1997), dove il generico investitore deve risolvere il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{cases} Min & \frac{1}{2}\omega'\Omega\omega \\ Sub & \omega'\mu = \mu_P \\ & \omega'\iota = 1 \end{cases} \quad [2.1]$$

dove

- $\mu$  è il vettore di dimensione  $n$  contenente i rendimenti dei titoli che fanno parte del portafoglio di mercato<sup>2</sup>;
- $\Omega$  è la matrice  $n \times n$  contenente sulla diagonale principale tutte le varianze e sugli elementi extra-diagonale tutte le covarianze. Data la sua struttura tale matrice deve essere simmetrica, definita positiva ed invertibile<sup>3</sup>;
- $\omega$  è il vettore delle  $n$  quote occupate dalle attività presenti in  $\mu$  all'interno del portafoglio diversificato  $P$ ;
- Il rendimento atteso di portafoglio è dato dallo scalare  $\mu_P$  la cui equazione è data dal primo vincolo del modello;
- La varianza di Portafoglio ( $\sigma_P^2$ ) è anch'essa uno scalare e la sua equazione è fornita dalla funzione obiettivo;
- Il vettore  $\iota$  ha dimensione  $n$  ed ogni suo elemento è pari ad 1.

Per risolvere il problema di minimo vincolato di cui alla [2.1] occorre calcolare il Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}\omega'\Omega\omega - \lambda_1(\omega'\mu - \mu_P) - \lambda_2(\omega'\iota - 1) \quad [2.2]$$

---

<sup>2</sup>Il portafoglio di mercato è un particolare portafoglio rappresentativo all'interno del quale sono compresi tutte le attività che generano un rendimento.

<sup>3</sup>La matrice  $\Omega$  non può avere elementi nulli o negativi sulla diagonale principale per le seguenti ragioni:

1. Le varianze non possono assumere valori negativi per definizione
2. Anche se in teoria può esistere un'attività con varianza nulla, tuttavia essa non può essere compresa in  $\Omega$  perché il suo rendimento sarebbe incorrelato con tutti gli altri rendimenti: in questo modo in corrispondenza del valore nullo di varianza si avrebbero un'intera riga ed un'intera colonna composte di zeri e ciò renderebbe la matrice singolare, quindi non invertibile.

Attraverso le condizioni del primo ordine risulta perciò:

$$\begin{cases} \omega = \Omega^{-1} [\lambda_1 \mu + \lambda_2 \iota] \\ \lambda_1 = \frac{b - a \cdot \mu_P}{d} \\ \lambda_2 = \frac{b \cdot \mu_P - c}{d} \end{cases} \quad [2.3]$$

dove  $\Omega^{-1}$  è la matrice inversa<sup>4</sup> di  $\Omega$ , mentre  $a = \iota' \Omega^{-1} \iota$ ,  $b = \iota' \Omega^{-1} \mu$ ,  $c = \mu' \Omega^{-1} \mu$  e  $d = b^2 - ac$  sono le costanti (scalari) del modello.

Si tenga presente che in presenza di un'attività priva di rischio con rendimento (certo) pari a  $\mu_f$ , il modello di cui alla [2.1] diviene:

$$\begin{cases} Min & \frac{1}{2} \omega' \Omega \omega \\ Sub & \omega' \mu + (1 - \omega' \iota) \mu_f = \mu_P \end{cases} \quad [2.4]$$

Come già anticipato all'interno della nota 1, nelle pagine successive è posto  $\mu_f = 0$ , quindi si rimanda il lettore interessato alla letteratura specifica in merito<sup>5</sup>.

## 2.1 La frontiera di portafoglio

La curva della frontiera di portafoglio è un luogo di punti tracciato in un sistema di riferimento Cartesiano con i valori del rischio atteso ( $\sigma_P$ ) sull'ascissa e con quelli del rendimento atteso ( $\mu_P$ ) sull'ordinata. La caratteristica fondamentale di tale funzione è quella della determinazione di quei punti in corrispondenza dei quali il rischio di portafoglio assume valore minimo dati i vincoli di cui alla [2.1]. Generalmente l'andamento grafico della curva è dello stesso tipo di quello mostrato in Figura 2.1.

Analiticamente tale curva si ricava premoltiplicando per il vettore riga  $\omega' \Omega$  la prima equazione del sistema [2.3]:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \omega' \Omega \omega \\ \sigma_P^2 &= \omega' \Omega \Omega^{-1} [\lambda_1 \mu + \lambda_2 \iota] \\ \sigma_P^2 &= \lambda_1 \omega' \mu + \lambda_2 \omega' \iota \end{aligned}$$

Per i vincoli di cui alla [2.1] risulta:

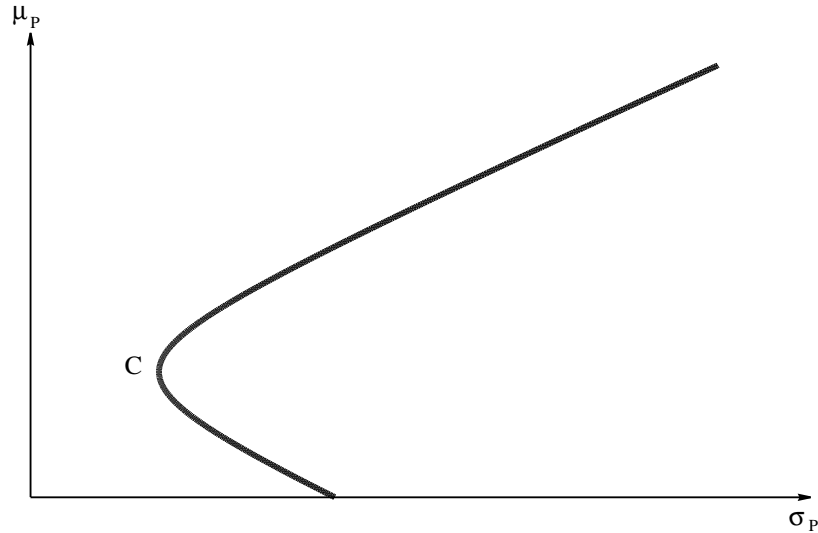
$$\sigma_P^2 = \lambda_1 \mu_P + \lambda_2 \quad [2.5]$$

Per la definizione dei parametri  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si nota immediatamente che la [2.5] è un'equazione di 2° grado in  $\mu_P$  per i valori della varianza di portafoglio. Poiché il rischio si identifica nello scarto quadratico medio dei rendimenti di portafoglio, la relazione tra  $\mu_P$  e  $\sigma_P$  si identifica sostanzialmente in un'iperbole

<sup>4</sup>Per la definizione di matrice inversa si rimanda all'Appendice 1.

<sup>5</sup>Si veda ad esempio Campbell, Lo e MacKinlay (1997).

Figura 2.1 – Curva della frontiera di portafoglio



con concavità rivolta verso destra<sup>6</sup> dove in corrispondenza del punto di minimo si trova il portafoglio  $C$  detto portafoglio con varianza minima.

Tutti i portafogli efficienti<sup>7</sup> giacciono sulla frontiera e si identificano in tutte le combinazioni rischio-rendimento che all'interno del grafico si trovano al di sopra del portafoglio  $C$ .

## 2.2 Portafoglio con varianza minima

Il portafoglio  $C$  è quella particolare combinazione rischio-rendimento atteso che si trova esattamente nel punto di minimo della curva della frontiera. Esso è ottenuto come soluzione del seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \text{Min} & \frac{1}{2} \omega'_C \Omega \omega_C \\ \text{Sub} & \omega'_C \iota = 1 \end{cases} \quad [2.6]$$

dove  $\omega_C$  è il vettore di dimensione  $n$  che rappresenta la quota assegnata a ciascuna attività all'interno del portafoglio  $C$ .

Attraverso le condizioni del primo ordine sul Lagrangiano si può concludere che le soluzioni della [2.6] sono:

$$\begin{cases} \omega_C = \frac{\Omega^{-1} \iota}{\iota' \Omega^{-1} \iota} \\ \lambda = \frac{1}{\iota' \Omega^{-1} \iota} \end{cases} \quad [2.7]$$

<sup>6</sup>La concavità verso destra scaturisce dal sistema di riferimento Cartesiano adottato, dove i valori del rendimento sono funzione di quelli del rischio atteso. In questo senso tale relazione si identifica nella funzione inversa della [2.5].

<sup>7</sup>Un portafoglio è detto efficiente quando, fissato un valore per  $\sigma_P$ , il rendimento che si ottiene investendo in esso risulta essere quello massimo ottenibile.

Da ciò segue immediatamente che nel portafoglio  $C$  i livelli attesi di rendimento e di rischio sono:

$$\begin{cases} \mu_C = \frac{\iota' \Omega^{-1} \mu}{\iota' \Omega^{-1} \iota} = \frac{c}{a} \\ \sigma_C^2 = \frac{1}{\iota' \Omega^{-1} \iota} = \frac{1}{a} \end{cases} \quad [2.8]$$

### 2.3 Portafoglio ottimo

Per la determinazione del portafoglio ottimo bisogna fare ricorso allo Sharpe Ratio<sup>8</sup> così definito:

$$SR_P = \frac{r_P}{\sigma_P} = \frac{\mu_P - \mu_f}{\sigma_P} \quad [2.9]$$

dove  $\mu_f$  (scalare) è il rendimento dell'attività priva di rischio, mentre  $r_P$  è l'extrarendimento o *excess return* del portafoglio diversificato dato dalla differenza tra il rendimento atteso del portafoglio diversificato  $P$  ed il rendimento  $\mu_f$ .

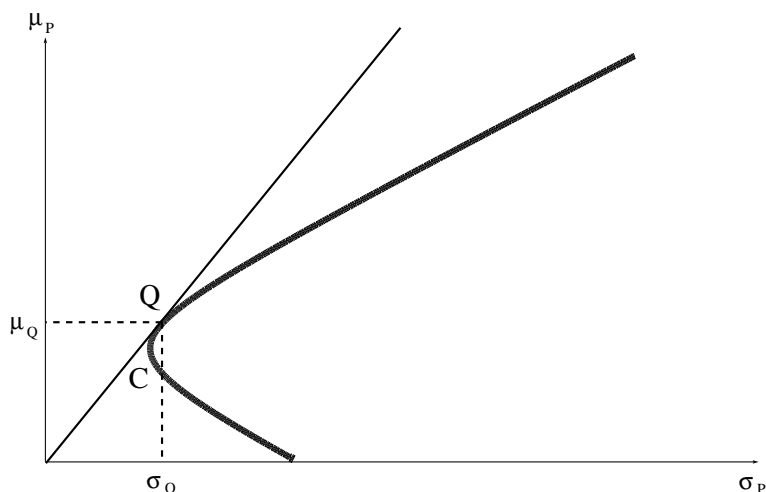
Nell'ipotesi secondo la quale sul mercato non esistano attività prive di rischio o queste abbiano rendimento  $\mu_f = 0$ , lo Sharpe Ratio sarà dato semplicemente dal rapporto tra rendimento e rischio atteso di portafoglio, quindi:

$$SR_P = \frac{\mu_P}{\sigma_P} \quad [2.10]$$

Dopo alcuni semplici passaggi si giunge alla conclusione che, all'interno del sistema di riferimento Cartesiano rischio-rendimento atteso, lo Sharpe Ratio si identifica nel coefficiente angolare della retta:

$$\mu_P = SR_P \cdot \sigma_P \quad [2.11]$$

Figura 2.2 - Determinazione del portafoglio ottimo



<sup>8</sup>Letteralmente "Rapporto di Sharpe" introdotto dallo stesso autore in Sharpe (1994).

Tale retta passa per l'origine e per il generico portafoglio  $P$  sul quale lo Sharpe Ratio è stato calcolato. Tale rapporto è quindi calcolabile per qualsiasi portafoglio  $P$  contenuto all'interno del piano e può assumere qualsiasi valore.

Il portafoglio ottimo  $Q$  è un portafoglio efficiente che è individuato nel punto in cui la retta di cui alla [2.11] è tangente alla curva della frontiera. Tale condizione di tangenza è evidenziata nella Figura 2.2. Nel punto  $Q$  lo Sharpe Ratio risulta perciò essere<sup>9</sup>:

$$SR_Q = \max\{SR_P\} \quad \text{per } \forall P \quad [2.12]$$

Analiticamente il portafoglio ottimo può essere determinato sfruttando la condizione di tangenza tra la curva della frontiera efficiente e la retta di cui alla [2.11]. Ciò equivale alla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sigma_P^2 = \lambda_1 \mu_P + \lambda_2 \\ SR_P^2 = \frac{\mu_P^2}{\sigma_P^2} \end{cases} \quad [2.13]$$

Esplicitando la seconda equazione per  $\sigma_P^2$  e sostituendo le espressioni dei moltiplicatori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  di cui alla [2.3] è possibile eguagliare le due espressioni.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_P + \lambda_2 &= \frac{\mu_P^2}{SR_P^2} \\ \frac{b - a\mu_P}{d} \mu_P + \frac{b\mu_P - c}{d} &= \frac{\mu_P^2}{SR_P^2} \\ \frac{2b\mu_P - a\mu_P^2 - c}{d} &= \frac{\mu_P^2}{SR_P^2} \\ (d + aSR_P^2)\mu_P^2 - 2bSR_P^2\mu_P + cSR_P^2 &= 0 \end{aligned} \quad [2.14]$$

Affinché sia verificata la condizione di tangenza deve essere nullo il discriminante dell'equazione di 2° grado in  $\mu_P$  di cui alla [2.14], quindi:

$$b^2 SR_P^4 - cSR_P^2(d + aSR_P^2) = 0$$

Per  $SR_P^2 \neq 0$  risulta:

$$\begin{aligned} b^2 SR_P^2 - cd - acSR_P^2 &= 0 \\ dSR_P^2 - cd &= 0 \\ SR_P^2 &= c \end{aligned} \quad [2.15]$$

Lo Sharpe Ratio del portafoglio ottimo è perciò<sup>10</sup>:

$$SR_Q = \sqrt{c} \quad [2.16]$$

<sup>9</sup>In presenza di un'attività priva di rischio, al posto della [2.11] si avrebbe la retta:

$$\mu_P = \mu_f + SR_P \cdot \sigma_P$$

In questo caso la retta ha intercetta positiva quindi taglia l'asse delle ordinate nel punto  $F(0, \mu_f)$ ; un'importante considerazione da effettuare è perciò quella che individua la frontiera efficiente di portafoglio nel tratto della retta tracciato dal segmento  $\overline{FQ}$ . Per  $\sigma_P < \sigma_Q$  esso individua tutte le possibili combinazioni lineari tra l'attività priva di rischio e le attività rischiose. Quando  $\sigma_P > \sigma_Q$  la frontiera efficiente è individuata dall'iperbole.

<sup>10</sup>La [2.15] restituisce le soluzioni  $SR_P = \pm\sqrt{c}$ ; poiché la retta tangente alla curva della frontiera efficiente di portafoglio ha inclinazione positiva, la soluzione negativa per lo Sharpe Ratio deve essere scartata.

Sostituendo la [2.16] all'interno della [2.15] si ottengono agevolmente rendimento e varianza attesi del portafoglio  $Q$  che risultano essere:

$$\begin{cases} \mu_Q = \frac{\mu' \Omega \mu}{\mu' \Omega \mu} = \frac{c}{b} \\ \sigma_Q^2 = \frac{\mu' \Omega \mu}{(\mu' \Omega \mu)^2} = \frac{c}{b^2} \end{cases} \quad [2.17]$$

## 2.4 Portafoglio con due sole attività

Alla luce di quanto detto finora, in questo paragrafo si illustra il caso particolare in cui il portafoglio di mercato sia costituito solamente da due attività rischiose. Tale esposizione ricalca quella contenuta all'interno di Caparrelli (1995).

Esistendo solo due attività rischiose il problema di cui alla [2.1] si riduce al seguente:

$$\begin{cases} Min & \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ Sub & \mu_P = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 \\ & \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases} \quad [2.18]$$

dove  $\rho$  è il coefficiente di correlazione tra i rendimenti delle due attività rischiose; a seconda del valore assunto dal coefficiente di correlazione si individuano alcuni casi presentati all'interno dei seguenti sottoparagrafi.

### 2.4.1 Perfetta correlazione positiva

Quando c'è perfetta correlazione positiva tra i rendimenti delle due attività rischiose, ciò significa che risulta  $\rho = 1$ . La [2.18] diventa perciò:

$$\begin{cases} Min & (\omega_1 \sigma_1 + \omega_2 \sigma_2)^2 \\ Sub & \mu_P = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 \\ & \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases} \quad [2.19]$$

Dal secondo vincolo si ottiene la relazione:

$$\omega_2 = 1 - \omega_1 \quad [2.20]$$

Sostituendo all'interno della funzione obiettivo si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= [\omega_1 \sigma_1 + (1 - \omega_1) \sigma_2]^2 \\ \sigma_P &= \omega_1 \sigma_1 + (1 - \omega_1) \sigma_2 \end{aligned} \quad [2.21]$$

Il peso dell'attività 1 all'interno del portafoglio è perciò:

$$\omega_1 = \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad [2.22]$$

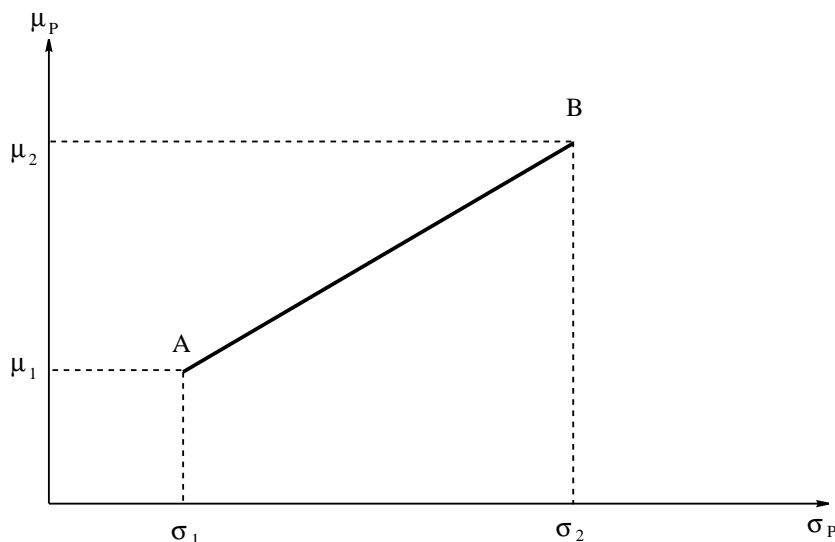
La curva della frontiera di portafoglio deriva dalla sostituzione di tale relazione all'interno del primo vincolo della [2.19], infatti:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \omega_1 \mu_1 + (1 - \omega_1) \mu_2 \\ \mu_P &= \frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 \\ \mu_P &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \sigma_P + \mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \sigma_2 \end{aligned} \quad [2.23]$$



Si nota immediatamente che l'equazione della frontiera delineata dalla [2.23] è quella di una retta crescente con coefficiente angolare pari a  $(\mu_1 - \mu_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$  ed intercetta pari a  $\mu_2 - \sigma_2(\mu_1 - \mu_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$ . Ipotizzando  $\sigma_1 < \sigma_2$ , la rappresentazione grafica di tale frontiera è contenuta in Figura 2.3.

Figura 2.3 – Frontiera di portafoglio per 2 attività con correlazione positiva perfetta



Dall'osservazione di tale figura si nota che la curva della frontiera di portafoglio è rappresentata da un segmento all'interno del quale sono contenute tutte le possibili combinazioni rischio-rendimento atteso ottenibili per valori positivi<sup>11</sup> delle quote  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Il portafoglio *A* è perciò quello che si otterrebbe investendo interamente nell'attività 1, mentre il portafoglio *B* è costituito dalla sola attività 2. Dal grafico si evince inoltre che le grandezze  $\sigma_P$  e  $\mu_P$  sono direttamente proporzionali e tutti i portafogli situati all'interno della curva sono efficienti.

#### 2.4.2 Perfetta correlazione negativa

Quando risulta  $\rho = -1$  si ha il caso di perfetta correlazione negativa tra i rendimenti delle due attività rischiose; il problema [2.18] diventa quindi:

$$\begin{cases} \text{Min} & (\omega_1\sigma_1 - \omega_2\sigma_2)^2 \\ \text{Sub} & \mu_P = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 \\ & \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases} \quad [2.24]$$

Dalla funzione obiettivo si ottiene:

$$\sigma_P = |\omega_1\sigma_1 - (1 - \omega_1)\sigma_2| \quad [2.25]$$

<sup>11</sup>Quando risulta che  $\omega_1 \leq 0$  oppure  $\omega_2 \leq 0$  si configura il caso delle vendite allo scoperto trattato all'interno del paragrafo 2.5.

L'applicazione del valore assoluto trova giustificazione nel fatto che  $\sigma_P$  deve assumere sempre valore positivo. Esplicitando il modulo si ha:

$$\omega_1 = \begin{cases} -\frac{\sigma_P - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} & \text{per } 0 \leq \omega_1 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \frac{\sigma_P + \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} & \text{per } \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} < \omega_1 \leq 1 \end{cases} \quad [2.26]$$

Sostituendo le due relazioni all'interno del primo vincolo della [2.24] determina due equazioni della curva della frontiera, infatti:

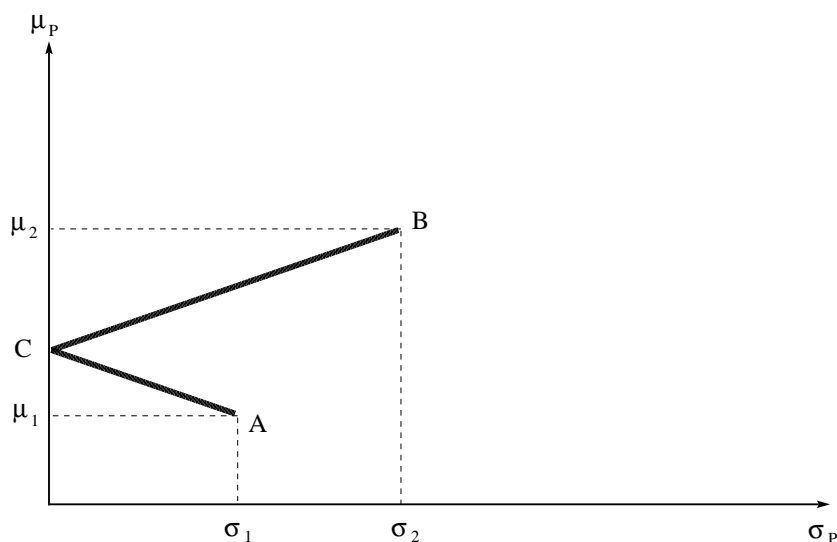
$$\mu_P = \begin{cases} -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_P + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_2 + \mu_2 \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_P + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_2 + \mu_2 \end{cases} \quad [2.27]$$

In questo caso tutte le possibili combinazioni rischio-rendimento atteso sono date da due rette aventi la stessa intercetta, ma coefficiente angolare inverso l'una dall'altra: ciò significa che il grafico della curva delle frontiera è dato da quello di una spezzata con punto angoloso che coincide col portafoglio  $C$  che ha coordinate

$$C \left( 0, \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_2 + \mu_2 \right)$$

Il grafico è contenuto in Figura 2.4.

Figura 2.4 – Frontiera di portafoglio per 2 attività con correlazione negativa perfetta



Osservando il grafico si nota agevolmente che la parte efficiente della curva è costituita dal segmento  $\overline{BC}$ , ma soprattutto che attraverso la diversificazione è possibile ridurre il rischio fino ad annullarlo (portafoglio  $C$ ).

### 2.4.3 Incorrelazione

Quando i rendimenti dei titoli sono incorrelati la loro covarianza è nulla quindi risulta  $\rho = 0$ . Il modello di cui alla [2.18] diventa perciò il seguente:

$$\begin{cases} \text{Min} & \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 \\ \text{Sub} & \mu_P = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 \\ & \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases} \quad [2.28]$$

Combinando il secondo vincolo alla funzione obiettivo si determina l'equazione del rischio atteso di portafoglio

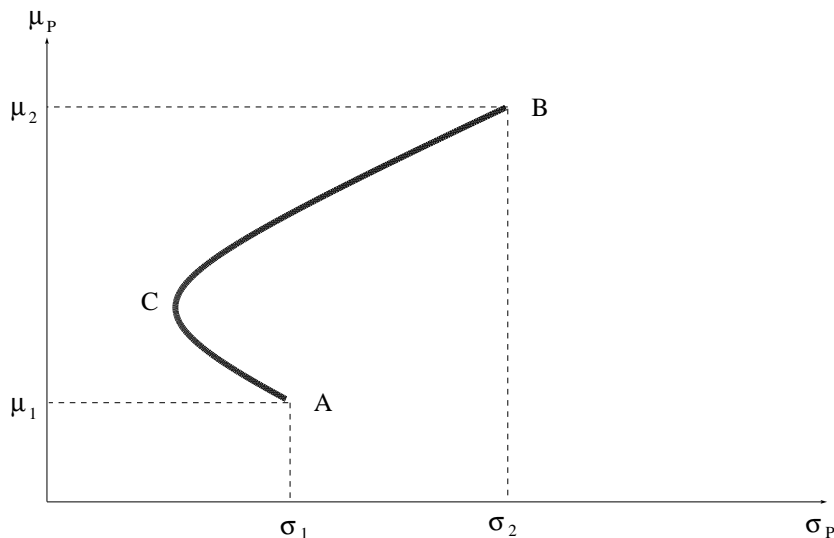
$$\sigma_P = \sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + (1 - \omega_1)^2\sigma_2^2} \quad [2.29]$$

La quota  $\omega_1$  si ottiene immediatamente e risulta essere:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\sigma_P^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}} \quad [2.30]$$

Alla luce di questo risultato sostituendo all'interno del primo vincolo della [2.18] si ottiene l'equazione di un'iperbole come mostrato dalla Figura 2.5.

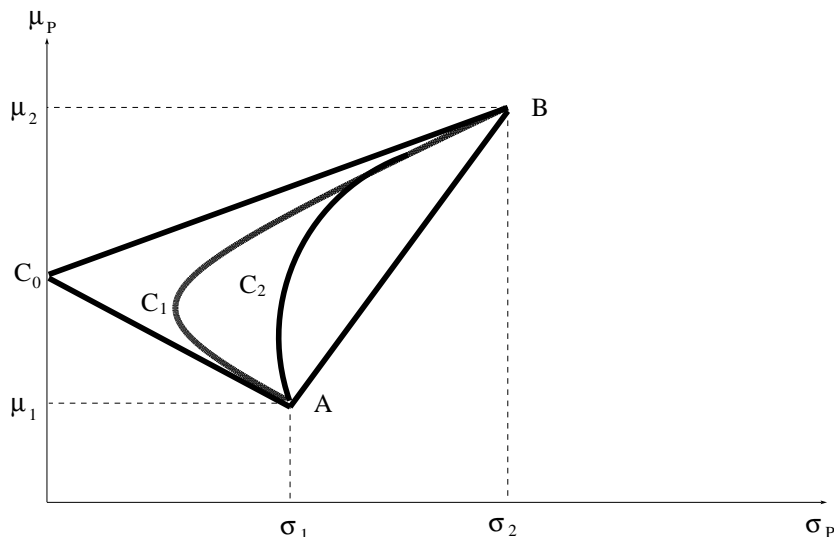
Figura 2.5 - Frontiera di portafoglio per 2 attività incorrelate



Il grafico è del tutto simile a quello di pag. 5 dove la parte efficiente è rappresentata dall'arco costituito dai portafoglio che hanno un livello atteso del rendimento maggiore o uguale a quello registrato in corrispondenza del portafoglio C. Anche in questo caso è possibile ricorrere alla diversificazione per ridurre il rischio atteso, anche se risulta impossibile annullarlo.

Il caso dell'incorrelazione è uno dei numerosi casi in cui si ha  $-1 \leq \rho \leq 1$ ; in definitiva è possibile sintetizzare all'interno di un grafico la gamma delle possibili frontiere di portafoglio in base ai diversi valori del coefficiente di correlazione (Figura 2.6).

Figura 2.6 – Frontiera di portafoglio per diversi valori del coefficiente di correlazione



All'interno della Figura 2.6 sono contemplati tutti i casi possibili per  $-1 \leq \rho \leq 1$ , infatti il segmento  $\overline{AB}$  è la curva di frontiera che si ottiene nel caso di perfetta correlazione positiva, la spezzata  $ACB$  è la curva che si ha per una perfetta correlazione negativa, mentre le iperboli tracciate rappresentano due casi intermedi.

## 2.5 Vendite allo scoperto

Osservando la Figura 2.7 ci si rende subito conto che le curve di frontiera possono prolungarsi oltre i punti  $A$  e  $B$  relativi ai portafogli investiti interamente su un'unica attività rischiosa. Graficamente i portafogli che si trovano oltre tali punti sono individuati con delle curve tratteggiate e sono caratterizzati da valori negativi per  $\omega_1$  oppure per  $\omega_2$ .

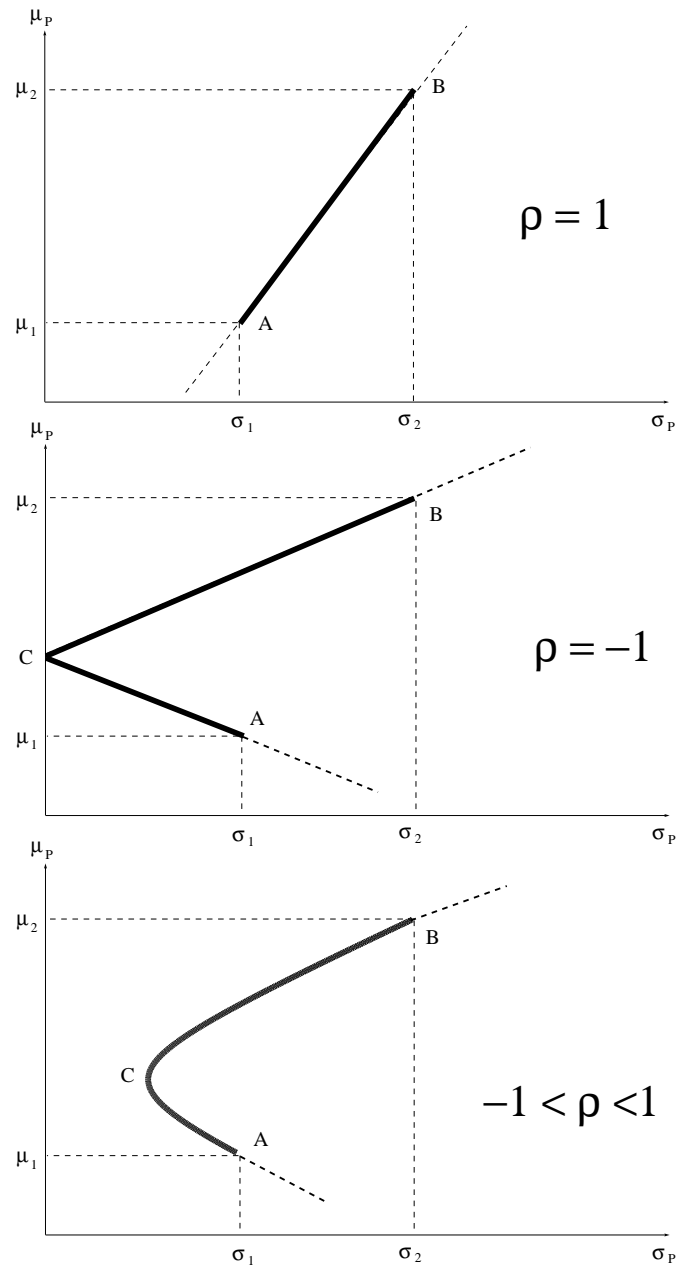
La detenzione di titoli per quote minori di zero si identificano sostanzialmente nelle **vendite allo scoperto**, cioè vendite di attività che non si possiede in portafoglio, quindi titoli che devono essere presi a prestito per poi essere consegnati all'acquirente.

Le ipotesi di funzionamento di tale struttura sono:

1. Le due attività sul mercato sono perfettamente divisibili
2. L'investitore dispone della ricchezza  $W_t$  per costruire il portafoglio
3. Nel periodo  $t$  egli prende a prestito una quantità  $B$  del titolo 1, che si impegna a restituire nel periodo  $t + 1$
4. Vendendo allo scoperto il titolo 1 egli può investire nel titolo 2<sup>12</sup>

<sup>12</sup>Tutto il ragionamento è effettuato per la vendita allo scoperto del titolo 1 può essere ripetuto in modo del tutto analogo per il titolo 2.

Figura 2.7 – Frontiera di portafoglio con possibilità di vendita allo scoperto



La ricchezza dell'investitore al tempo  $t + 1$  è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} W_{t+1} &= W_t + W_1\mu_1 + W_2\mu_2 \\ W_{t+1} &= W_t + (-B)\mu_1 + (W_t + B)\mu_2 \end{aligned} \quad [2.31]$$

dove  $W_1$  e  $W_2$  sono le quote di  $W_t$  destinate rispettivamente al titolo 1 e al titolo 2; ovviamente risulta  $W_t = W_1 + W_2$ .

Il rendimento del portafoglio diversificato sarà perciò:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \frac{W_{t+1} - W_t}{W_t} \\ \mu_P &= -\frac{B}{W_t}\mu_1 + \frac{W_t + B}{W_t}\mu_2 \end{aligned}$$

Ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = -\frac{B}{W_t} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 < 0 \\ \omega_2 = \frac{W_t + B}{W_t} \quad \Rightarrow \quad 1 - \omega_1 > 1 \end{array} \right.$$

i vincoli della [2.18] sono rispettati anche in presenza di vendite allo scoperto. Osservando la Figura 2.7 nei tratti di curva tratteggiata che partono dal punto  $A$  giacciono quei portafogli ottenuti vendendo allo scoperto l'attività 2 per finanziare l'acquisto dell'attività 1, mentre nel tratto che si ottiene prolungando la frontiera a partire da  $B$  individua tutti quei portafogli ricavati vendendo allo scoperto l'attività 1.

### 3 Il modello di simulazione

Il modello di simulazione che si intende costruire sarà composto da 4 fogli di lavoro più un grafico dove saranno tracciate la curva della frontiera di portafoglio e la retta con coefficiente pari al massimo valore possibile per lo Sharpe Ratio.

Tutti i fogli di lavoro sono tra loro in stretta relazione, quindi la modifica di un singolo valore o funzione deve avere ripercussioni all'interno dell'intero file.

Il file sarà costruito ipotizzando che sul mercato si possa scegliere solo tra 2 diversi titoli rischiosi; poiché l'implementazione riguarda il modello generale illustrato nel capitolo 2, con un po' di buona volontà è sempre possibile aumentare a piacimento la numerosità delle attività presenti sul mercato.

Nei paragrafi che seguono saranno illustrati composizione e funzionamento di ciascun foglio o grafico.

#### 3.1 Foglio di lavoro "Dati"

Questo foglio di lavoro deve contenere tutte le informazioni da inserire manualmente<sup>13</sup> all'interno del modello. Esse sono:

- a) Gli elementi della diagonale principale della matrice delle varianze e delle covarianze ( $\Omega$ ). Nel caso di una matrice  $2 \times 2$  occorre costruire una tabella come segue:

<sup>13</sup>Si consiglia di colorare le celle che possono essere modificate a mano in modo da distinguerle da quelle che al loro interno contengono funzioni.

|       |       |
|-------|-------|
| var1  | cov12 |
| cov12 | var2  |

- b) Il vettore  $\mu$  contenente i rendimenti dei 2 titoli su cui è possibile investire
- c) il coefficiente di correlazione  $\rho$ . Si tenga comunque presente che nel caso di portafoglio composto da 2 attività rischiose c'è solo un coefficiente di correlazione, mentre normalmente, per  $n$  attività rischiose, esistono in tutto  $n(n-1)/2$  diversi coefficienti  $\rho$

Una volta inseriti a piacimento i valori di cui sopra, la matrice  $\Omega$  può essere completata nei suoi elementi extra-diagonale in modo automatico. Dato che la covarianza dei rendimenti dei 2 titoli rischiosi è data dall'espressione

$$\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2\rho \quad [3.32]$$

conoscendo i valori delle varianze e del coefficiente di correlazione, nella cella della covarianza al di sotto della diagonale principale di  $\Omega$  va impostata la funzione:

$$=\text{RADQ}(\text{var1})*\text{RADQ}(\text{var2})*\text{rho}$$

dove il coefficiente di correlazione è indicato con *rho*. Poiché la matrice delle varianze e delle covarianze è simmetrica, per calcolare l'altra covarianza basta eguagliare la cella posta al di sopra della diagonale principale a quella appena calcolata con la formula di cui sopra.

A questo punto è possibile determinare la matrice inversa  $\Omega^{-1}$ . Anche in questo caso Excel è in grado di calcolare in automatico tale grandezza e le operazioni da eseguire sono:

- Selezionare un insieme di celle uguali a quelle contenute in  $\Omega$  per quanto riguarda numerosità e disposizione<sup>14</sup>
- Impostare al loro interno la funzione

$$=\text{INDICE}(\text{MATR. INVERSA}(\text{var1}:\text{var2}); i; j)$$

dove  $i$  e  $j$  sono rispettivamente il numero di riga e di colonna della matrice inversa.

Un'informazione superflua per quanto riguarda il modello, ma necessaria al fine di stabilire se la matrice delle varianze e delle covarianze è invertibile oppure singolare, è il determinante<sup>15</sup> di  $\Omega$ . Per il suo calcolo basta posizionarsi su una cella vuota e digitare

$$=\text{MATR. DETERM}(\text{var1}:\text{var2})$$

<sup>14</sup>Quando si intende selezionare una matrice in Microsoft Excel, come estremi si utilizzano la cella posta all'incrocio della prima riga con la prima colonna e quella situata all'incrocio dell'ultima riga con l'ultima colonna.

<sup>15</sup>Si veda in proposito l'Appendice 1.

### 3.2 Foglio di lavoro “Modello”

In questo foglio si implementa il modello vero e proprio quindi al suo interno si hanno i seguenti elementi:

1. Il vettore  $\iota$  costituito da 2 celle consecutive disposte verticalmente ed entrambe contenenti il valore 1
2. Le **quantità intermedie**  $\Omega^{-1}\iota$ ,  $\Omega^{-1}\mu$  e  $\Omega\omega$  utili per il calcolo di altre grandezze. Prendendo ad esempio il vettore  $\Omega\omega$  (per il calcolo degli altri due vettori il procedimento è del tutto analogo), il suo  $i$ -esimo elemento è calcolato attraverso la funzione:

$$=\text{INDICE}(\text{MATR.PRODOTTO}(\text{Dati!var1:var2};\text{w1:w2});i)$$

3. I **vettori trasposti** di  $\iota$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  e  $\omega_C$ . Per il loro ottenimento basta copiare in sequenza orizzontale le celle corrispondenti ai vettori disposti verticalmente.
4. I **Parametri** scalari  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  che dipendono solo dai valori immessi nel foglio di lavoro “Dati”, nonché i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  che invece dipendono dal valore desiderato per  $\mu_P$  che compare all’interno del foglio “Portafogli”<sup>16</sup>. Per calcolare i parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$  si utilizza la funzione

$$=\text{MATR.PRODOTTO}(\text{tr1:tr2};\text{int1:int2})$$

dove  $tr1$  e  $tr2$  rappresentano le componenti del vettore trasposto che premoltiplica le quantità intermedie, indicate con  $int1$  e  $int2$ . Per i moltiplicatori di Lagrange basta impostare le somme, prodotti e divisioni di cui alla [2.3] ed utilizzare per il rendimento atteso di portafoglio quello selezionato nel foglio di lavoro “Portafogli”.

5. I **Risultati**: in termini di vettore dei pesi da attribuire a ciascun titolo all’interno del portafoglio. In questo foglio vengono calcolati automaticamente i pesi di tre portafogli: quelli del generico portafoglio  $P$  contenuti nel vettore  $\omega$ , quelli relativi al portafoglio  $C$  contenuti nel vettore  $\omega_C$  e infine quelli del portafoglio ottimo  $Q$  disposti all’interno di  $\omega_Q$ . Avendo già a disposizione tutti i parametri, le quantità intermedie e la matrice  $\Omega^{-1}$  tale calcolo non dovrebbe generare particolari problemi.
6. **Controlli**: queste celle hanno l’unica funzione di dimostrare che variando i dati (matrice  $\Omega$ , vettore  $\mu$  e valore atteso del rendimento di portafoglio  $\mu_P$ ) i vincoli presenti nella [2.1] e nella [2.6] sono sempre rispettati. Per il primo vincolo occorre verificare che la somma dei rendimenti attesi ponderata per i rispettivi pesi eguagli il rendimento atteso di portafoglio  $\mu_P$ . A questo proposito si utilizza la funzione:

$$=\text{MATR.PRODOTTO}(\text{w1:w2};\text{Dati!m1:m2})$$

<sup>16</sup>Il foglio “Portafogli” è l’oggetto della sezione 3.4, mentre tutti i parametri scalari del modello sono definiti a pag. 4.



dove con  $w1$  e  $w2$  si indicano i pesi di portafoglio, mentre con  $m1$  e  $m2$  si indicano i rendimenti dei titoli (vettore  $\mu$ ). Il secondo vincolo impone che la somma dei pesi sia sempre pari all'unità quindi basta digitare:

$$=\text{SOMMA}(w1:w2)$$

### 3.3 Foglio di lavoro “Calcoli”

Questo foglio ha l'unica funzione di individuare la curva della frontiera di portafoglio, la retta ad essa tangente avente come coefficiente angolare il valore massimo ottenibile per lo Sharpe Ratio ed il portafoglio ottimo.

Nelle prime due colonne **A** e **B** ci sono i valori di  $\lambda_1$  e di  $\lambda_2$  ottenuti per tutti i possibili valori di  $\mu_P$  compresi nell'intervallo  $[0, 1]$  e per i parametri  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  calcolati precedentemente nel foglio di lavoro “Modello”. Non sono richieste particolari funzioni di Microsoft Excel.

Nella colonna **C** è calcolata la varianza di portafoglio in corrispondenza di tutti i valori assunti dai moltiplicatori di Lagrange. Tale colonna è ottenuta semplicemente sfruttando la relazione [2.5]:

$$\sigma_P^2 = \lambda_1^2 \mu_P + \lambda_2 \quad [3.33]$$

La colonna **D** relativa al rischio atteso di portafoglio è ottenuta semplicemente attraverso l'estrazione della radice quadrata dei valori della varianza, quindi per l' $i$ -esima cella basta impostare:

$$=\text{RADQ}(\text{var}_i)$$

La colonna **E** contiene tutti i possibili valori in millesimi appartenenti all'intervallo  $[0, 1]$  del rendimento atteso di portafoglio.

La sesta colonna **F** fornisce i valori della retta di cui alla [2.11]: per la determinazione di tale retta si utilizza lo Sharpe Ratio del portafoglio  $Q$  che sarà determinato all'interno del foglio “Portafogli”.

### 3.4 Foglio di lavoro “Portafogli”

Questo foglio rappresenta l'output del modello in quanto mostra rendimento, varianza, rischio e Sharpe Ratio relativamente al generico portafoglio diversificato  $P$ , al portafoglio  $C$  con varianza minima e al portafoglio ottimo  $Q$ .

Per quanto riguarda il portafoglio  $P$ , i valori sono calcolati in corrispondenza del livello desiderato per  $\mu_P$ , cella da compilare a mano. La varianza di portafoglio è data dalla relazione  $\sigma_P^2 = \omega' \Omega \omega$  che nel file si calcola agevolmente attraverso la funzione:

$$=\text{MATR.PRODOTTO}(\text{Modello!}w1':w2';\text{Modello!}Ww1:Ww2)$$

dove  $w1'$  e  $w2'$  sono le componenti del vettore trasposto  $\omega'$ , mentre  $Ww1$  e  $Ww2$  sono le quantità intermedie incluse in  $\Omega\omega$ . Le caratteristiche dei portafogli  $C$  e  $Q$  sono invece determinate automaticamente e dipendono solo dai valori contenuti in “Dati”. Il rendimento atteso e la varianza di  $C$  si desumono direttamente dalla [2.8], mentre i valori del portafoglio  $Q$  sono quelli di cui alla [2.17].

Per calcolare il rischio di tutti i portafogli considerati è sufficiente estrarre la radice quadrata delle rispettive varianze, mentre per determinare lo Sharpe Ratio basta mettere in rapporto i rendimenti con i rispettivi rischi. Si tenga infine presente che il valore massimo possibile per lo Sharpe Ratio è  $SR_Q = \sqrt{c}$ .

### 3.5 Grafico “Frontiera”

Il grafico “Frontiera” è ottenuto direttamente dal foglio di lavoro “Calcoli”. In esso sono mostrate la curva della frontiera di portafoglio e la retta  $\mu_P = SR_Q \cdot \sigma_P$  ad essa tangente all’interno di un sistema di riferimenti Cartesiani con  $\sigma_P$  sull’ascissa e  $\mu_P$  sull’ordinata. Tale rappresentazione mostra la condizione per l’ottenimento del portafoglio ottimo. Il tipo di grafico utilizzato è quello “Dispers.(XY)” di Microsoft Excel.

Variando i valori del coefficiente di correlazione nel foglio “Dati” il grafico così ottenuto deve essere in grado di replicare tutti gli andamenti della curva frontiera evidenziati in Figura 2.7.

#### Attenzione!

Quando  $\rho = \pm 1$  la matrice  $\Omega$  non è invertibile (determinante nullo) quindi il modello non è in grado di fornire i risultati attesi. Il problema si risolve immediatamente facendo tendere il coefficiente di correlazione ai valori  $\pm 1$  ponendo ad esempio  $\rho = \pm 0.9999$ .

### 3.6 Possibili ampliamenti

L’impianto appena descritto per la creazione di un file in grado di simulare il modello media-varianza di Markowitz (1959), potrebbe essere esteso contemplando alcune modifiche sostanziali come ad esempio:

1. Ampliamento del numero di attività rischiose presenti sul mercato
2. Introduzione di un’attività priva di rischio con rendimento certo pari a  $\mu_f$  e rischio atteso pari a zero<sup>17</sup>
3. Grafico della frontiera nel caso in cui non siano possibili vendite allo scoperto, quindi  $0 \leq \omega_i \leq 1$  per ogni  $i$
4. Introduzione di ulteriori vincoli alla [2.1]

---

<sup>17</sup>Si veda l’equazione [2.4]

## Appendice 1: Operazioni su matrici e vettori

Per il corretto funzionamento del modello non si può prescindere dalla conoscenza di alcune proprietà delle matrici e dei vettori. In questa appendice sono contenute soltanto quelle definizioni di algebra delle matrici essenziali per poter comprendere i concetti introdotti in questo lavoro<sup>18</sup>.

Si consideri pertanto la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

dove  $a_{ij}$  è l'elemento della matrice  $A$  posto all'incrocio dell' $i$ -esima riga e della  $j$ -esima colonna. La matrice ha in tutto  $n$  righe e  $k$  colonne. La matrice  $A$  ha perciò dimensione  $n \times k$ ; quando  $n = k$  si parla di matrice quadrata. Nell'ambito delle matrici quadrate si possono avere:

1. Matrici **simmetriche**<sup>19</sup>: se  $a_{ij}$  è il generico elemento posto all'incrocio dell' $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna, la matrice è simmetrica se vale l'uguaglianza  $a_{ij} = a_{ji}$  per  $\forall i \neq j$ .
2. Matrici **triangolari**: matrici che hanno tutti elementi nulli al di sopra o al di sotto della diagonale principale.
3. Matrici **diagonali**: matrici simmetriche che hanno tutti gli elementi extradiagonali nulli.

Si ha un **VETTORE** ogniqualvolta  $n = 1$  oppure  $k = 1$ : nel primo caso si parla di **vettore riga**, mentre nel secondo caso si parla di **vettore colonna**. Allo stesso modo uno **SCALARE** può essere visto come una matrice di dimensione  $1 \times 1$ .

### Matrice trasposta

La matrice trasposta  $A'$  è una matrice le cui righe e colonne sono rispettivamente le colonne e le righe di  $A$ . Analiticamente essa si configura nel modo seguente:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Ovviamente se  $A$  ha dimensione  $n \times k$ ,  $A'$  ha dimensione  $k \times n$ . Le matrici  $A$  e  $A'$  coincidono solo nel caso in cui  $A$  è simmetrica. Nel caso dei vettori, il trasposto di un vettore riga è un vettore colonna avente gli stessi elementi, mentre trasponendo un vettore colonna si ottiene un vettore riga. Gli scalari coincidono col loro trasposto.

<sup>18</sup>Il contenuto di questa Appendice è liberamente tratto da Palomba (2004).

<sup>19</sup>Questo è il caso della matrice delle varianze e delle covarianze  $\Omega$ .

### Matrice identità

La matrice identità è una matrice diagonale con gli elementi posti sulla diagonale principale pari ad 1, mentre tutti gli altri elementi sono nulli. Analiticamente si ha:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

### Somma di matrici

La somma tra due matrici è possibile solo nel caso in cui le matrici da sommare abbiano lo stesso numero di righe e di colonne. Tale operazione si effettua a sommando ciascun elemento della prima matrice il corrispondente elemento della seconda. In sintesi:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix} \\ A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2k} + b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nk} + b_{nk} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La somma di matrici gode della proprietà commutativa, quindi vale l'uguaglianza  $A + B = B + A$ . Analogamente la somma di vettori è possibile solo quando questi hanno lo stesso numero di righe e/o colonne: non è perciò possibile sommare un vettore riga ad un vettore colonna anche se hanno la stessa dimensione.

### Prodotto di matrici

Il prodotto tra matrici è un'operazione particolare che può essere realizzata solo nel caso in cui il numero delle colonne della matrice che premoltiplica è uguale al numero della matrice che postmoltiplica; in questo caso si parla di **matrici conformabili**.

Si considerino le matrici  $A$  di dimensione  $n \times k$  e  $B$  di dimensioni  $k \times m$ . Dato che il numero delle colonne di  $A$  è uguale al numero di righe di  $B$  il prodotto  $AB$  è possibile e vale:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{im} \\ \sum_{i=1}^k a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^k a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{2i}b_{im} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^k a_{ni}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^k a_{ni}b_{im} \end{bmatrix}$$

Il risultato è l'ottenimento di una matrice di dimensione  $n \times m$  cioè con numero di righe pari a quello di  $A$  e numero di colonne pari a quello di  $B$ . Ciascun elemento  $c_{rs}$  ( $r$ -esima riga e  $s$ -esima colonna) di  $AB$  è ricavato attraverso il "prodotto riga per colonna", quindi risulta:

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^k a_{ri}b_{is}$$

A titolo di esempio si può considerare il primo vincolo della [2.1] nell'ipotesi di esistenza di due sole attività rischiose:

$$\begin{aligned} \mu_P &= \omega' \mu \\ \mu_P &= [\omega_1 \quad \omega_2] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\ \mu_P &= \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 \end{aligned}$$

Dato che  $\omega'$  ha dimensione  $1 \times 2$  e  $\mu$  ha dimensione  $2 \times 1$ , i vettori sono conformabili ed il loro risultato è dato da uno scalare (vettore  $1 \times 1$ ).

Se è possibile il prodotto  $AB$  non è detto che sia possibile il prodotto  $BA$ : se  $n \neq m$  le matrici non conformano quindi  $BA$  non esiste.

Se sono possibili entrambi i prodotti  $AB$  e  $BA$  non è detto che questi coincidano, quindi il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa.

La matrice identità è l'elemento neutro del prodotto tra matrici sia nel caso in cui premoltiplica, sia nel caso in cui postmoltiplica, infatti:

$$AI = A \quad \text{oppure} \quad IA = A$$

Il prodotto di uno scalare per una matrice è invece sempre possibile in quanto basta moltiplicare lo scalare per ciascun elemento della matrice stessa.

### Determinante di una matrice

Il determinante di una generica matrice  $A$  è un numero generato dalla seguente equazione:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

dove  $a_{ij}$  è l'elemento di  $A$  posto all'incrocio dell' $i$ -esima riga e della  $j$ -esima colonna e  $A_{ij}$  è la matrice  $A$  priva dell' $i$ -esima riga e della  $j$ -esima colonna. Il determinante è calcolabile solo per matrici quadrate e può assumere qualsiasi valore reale. Nella matrice  $2 \times 2$  esso coincide con la differenza tra il prodotto degli elementi posti lungo la diagonale principale ed il prodotto degli elementi extradiagonale (regola di Kramer).

### Matrice inversa

Si consideri una generica matrice quadrata  $A$ : la sua matrice inversa  $A^{-1}$  è determinata in modo che sia soddisfatta una delle seguenti equazioni:

$$AA^{-1} = I \quad \text{oppure} \quad A^{-1}A = I$$

La matrice  $A^{-1}$  è anch'essa una matrice quadrata, è unica ed ha la stessa dimensione di  $A$ . Quando la matrice inversa esiste si dice che  $A$  è **invertibile**, mentre quando essa non esiste, si parla di matrice **singolare**. Tutte le matrici singolari hanno la caratteristica fondamentale di avere il determinante nullo.

L'inversa di una matrice diagonale è anch'essa diagonale ed ha gli elementi sulla diagonale pari ai reciproci di quelli presenti nella matrice di partenza.

La matrice identità è invertibile ed uguale alla sua inversa.

La formula per l'ottenimento della matrice inversa è la seguente:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [A]'$$

dove  $|A|$  e  $[A]'$  sono rispettivamente il determinante e la trasposta della **matrice aggiunta** della matrice  $A$ . Gli elementi della matrice aggiunta  $[A]$  si ottengono attraverso la seguente formula:

$$[a]_{ij} = |A_{ij}|(-1)^{i+j}$$

Da tale formula si evince che:

- Se  $i + j$  è pari  $\Rightarrow [a]_{ij} = |A_{ij}|$
- Se  $i + j$  è dispari  $\Rightarrow [a]_{ij} = -|A_{ij}|$

dove  $|A_{ij}|$  è il determinante della matrice  $A$  priva dell' $i$ -esima riga e della  $j$ -esima colonna.

Nel caso di matrici  $2 \times 2$  il calcolo della trasposta della matrice aggiunta è banale in quanto basta invertire la posizione degli elementi posti sulla diagonale principale e cambiare il segno a quelli extradiagonale.

## Appendice 2: Funzioni di Excel utilizzate

Per l'implementazione del modello di simulazione sono state utilizzate le seguenti funzioni di Microsoft Excel:

- **INDICE**  
Funzione associata alle operazioni sulle matrici, essa indica qual è l'elemento considerato all'interno di una matrice. Nel caso di matrici la funzione vuole tre argomenti (l'operazione condotta tra matrici, il numero di riga, il numero di colonna), mentre nel caso di vettore essa vuole solo due argomenti (l'operazione, il numero di riga **oppure** quello di colonna).
- **MATR.DETERM**  
Calcola il determinante della matrice che compare come suo unico argomento. Per la selezione di tale matrice si considera l'intervallo con estremi dati dal primo elemento della prima riga e l'ultimo dell'ultima riga.
- **MATR.INVERSA**  
Restituisce i valori della matrice inversa di quella selezionata come argomento della funzione.
- **MATR.PRODOTTO**  
Restituisce i valori contenuti nella matrice (o vettore) ottenuta come risultato del prodotto riga per colonna. Il suo argomento è costituito dalle due matrici da moltiplicare. I due intervalli utilizzati per definire tali matrici devono essere separati dal segno “;”.
- **RADQ**  
Estrae la radice quadrata del valore contenuto nella cella che compare come suo unico argomento.
- **SOMMA**  
Calcola la somma dei valori contenuti all'interno delle celle che fanno parte dell'intervallo che funge da unico argomento della funzione.

## Riferimenti bibliografici

- CAMPBELL, J. Y., LO, A. W. E MACKINLAY, A. C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press.
- CAPARRELLI, F. (1995). *Il mercato azionario*, vol. 1. Mac Graw-Hill, Milano.
- LINTNER, J. (1965). *The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets*. *Review of Economics and Statistics*, 47(no. 1): 13–37.
- MARKOWITZ, H. M. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. John Wiley, New York.
- PALOMBA, G. (2004). *Elementi di statistica per l'econometria*. CLUA Edizioni, Ancona.
- SHARPE, W. F. (1964). *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*. *Journal of Finance*, 19: 425–442.
- (1994). *The sharpe ratio*. *Journal of Portfolio Management*, 21(no. 1): 49–58.