Richiami di matematica

Giulio Palomba

corso di
Economia Politica I
(sede di San Benedetto del Tronto)

Nota

Lo scopo di queste pagine è sostanzialmente quello di richiamare l'attenzione degli studenti su alcuni strumenti analitici utili per il corso di Economia Politica I. In realtà gli argomenti affrontati non vengono presentati in maniera rigorosa (per quello ci sono i docenti di matematica!), bensì si è tentato un approccio di tipo "intuitivo" e schematico, basato sul consolidamento di alcune nozioni di Matematica Generale cercando nel contempo di generalizzare il tutto nello spazio ad n dimensioni.

Questo lavoro si avvale dei preziosi suggerimenti della Prof.ssa Maria Cristina Recchioni e della Prof.ssa Adina Scoccia, rispettivamente docenti titolari dei corsi di Matematica Generale e di Complementi di Matematica.

Funzione

Una funzione è una relazione tra i due seguenti insiemi

- X detto dominio, insieme di definizione o campo di esistenza,
- Y detto codominio.

La funzione associa ad ogni elemento del dominio $x \in X$ uno e un solo elemento del codominio $y \in Y$. In simboli

$$f(x)\colon X \longrightarrow Y,$$

dove

- x è l'argomento della funzione oppure un valore della **variabile indipendente (o esplicativa)**
- $y = y(x)$ è un valore della **variabile dipendente**.

Come sinonimi del termine "funzione" si utilizzano spesso le diciture "applicazione" o "trasformazione".

Funzione di più variabili

Nel caso generale la variabile esplicativa x è un **vettore**, cioè un ordinamento contenente n numeri (o **scalari**). Si definisce pertanto la **funzione di più variabili**

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dove la variabile dipendente è uno scalare.

Esempio:
La scrittura $y(x)\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ indica una funzione di n variabili nella quale

- il dominio è rappresentato dallo spazio contenente i vettori di n-dimensioni nei quali ciascun elemento è un numero reale ($x \in \mathbb{R}^n$),
- il codominio è rappresentato dallo spazio dei numeri reali ($y \in \mathbb{R}$).

Concetto di spazio

A seconda della dimensione n si ha:

$n = 0$: punto (assenza di dimensioni)
Non ci sono coordinate;

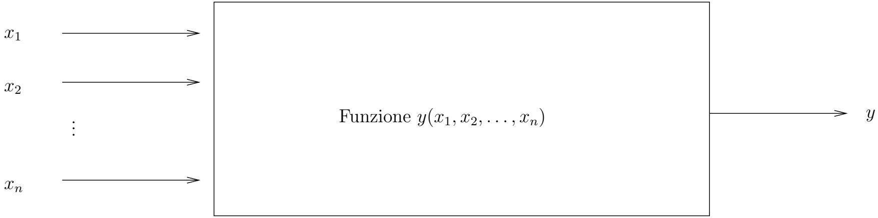
$n = 1$: retta (bastano due punti non coincidenti)
1 coordinata, l'**ascissa**;

$n = 2$: piano (bastano due rette non coincidenti)
2 coordinate, l'**ascissa** e l'**ordinata**;

$n = 3$: spazio tridimensionale (bastano due piani non coincidenti)
3 coordinate, l'**ascissa**, l'**ordinata** e la **quota**;

$n > 3$: spazio non "disegnabile", mantiene tutte le proprietà analitiche degli spazi precedenti (operazioni, derivate, integrali ecc.)
n coordinate.

Funzione come “scatola nera”



- retta: funzione di **una** variabile $y = y(x)$,
- piano: funzione di **due** variabili $y = y(x_1, x_2)$,
- spazio: funzione di **tre** variabili $y = y(x_1, x_2, x_3)$,
- iperspazio: funzione di **n>3** variabili $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Derivata — 1

Analiticamente la derivata della funzione $y = y(x)$ nel punto $x = x_0$ è definita come il **limite del rapporto incrementale** $R(h)$ quando l'incremento $h = x - x_0$ tende a zero, cioè

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} R(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Naturalmente la funzione $y = y(x)$ è derivabile nel punto $x = x_0$ se tale limite ammette valore finito.
Rapporto incrementale: rapporto tra l'incremento della variabile dipendente e l'incremento della variabile indipendente o esplicativa.

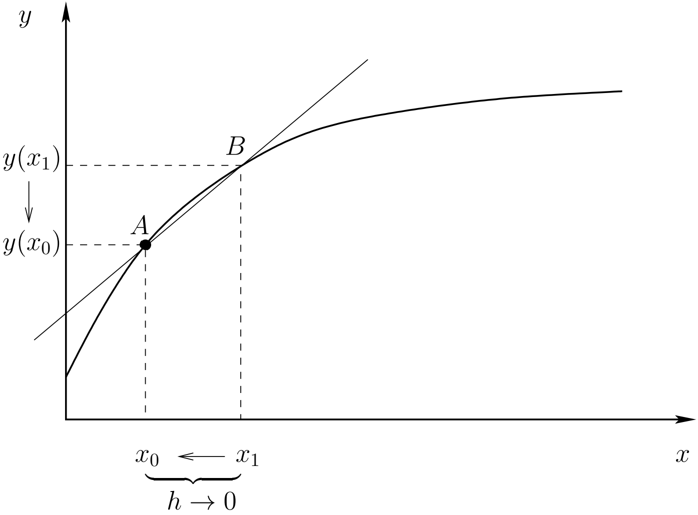
Derivata — 2

La derivata è generalmente indicata attraverso due tipi alternativi di scrittura:

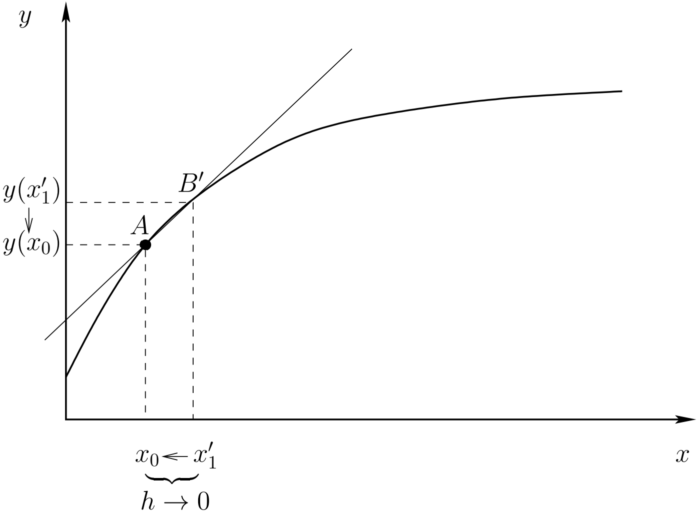
1. $y'(x)$, dove l'apice indica la "derivata prima" della funzione $y(x)$,
2. $\dfrac{\partial y(x)}{\partial x}$, dove $h \to 0$, quindi $x \to x_0$, implicano che
   - $\partial y \approx y(x) - y(x_0)$ è l'incremento infinitesimo della variabile dipendente,
   - $\partial x \approx x - x_0$ è l'incremento infinitesimo della variabile indipendente.

Nel corso di Economia Politica I verrà impiegata la seconda definizione in quanto mette in evidenza la funzione da derivare al numeratore e la variabile in base alla quale si deriva al denominatore.

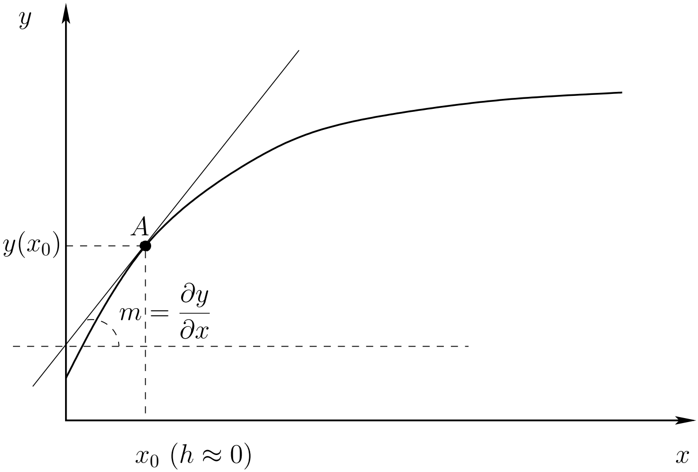
Limite di $R(h)$ — 1



Limite di $R(h)$ — 2



Limite di $R(h)$ — 3



Significato geometrico della derivata

La relazione

$$m = \frac{\partial y}{\partial x}$$

evidenzia che, dal punto di vista geometrico, la derivata è il **coefficiente angolare** della retta tangente al grafico della funzione in corrispondenza del punto $A \equiv (x_0, y(x_0))$.

Dall'espressione della derivata si ottiene l'equazione della retta passante per A, infatti

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} && \Delta y \text{ e } \Delta x \text{ non necessariamente infinitesimi} \\ &= \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} && \text{per ogni } x \neq x_0 \end{aligned}$$

quindi

$$y(x) - y(x_0) = m(x - x_0) \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = y(x_0) + m(x - x_0)$$

Dal punto di vista economico la derivata

$$m = \frac{\partial y}{\partial x}$$

indica l'**impatto marginale** della variabile economica x sulla variabile economica $y(x)$. In altri termini, se la variabile x aumenta di una unità, tale aumento provoca una variazione della variabile $y(x)$ pari a

$$\Delta y(x) \approx m\Delta x = m(x - x_0) = m.$$

N.B.:

se la funzione $y(x)$ è lineare l'approssimazione "$\approx$" diventa uguaglianza "$=$".

Significato economico della derivata — 2

L'**impatto marginale** della variabile economica x sulla variabile economica $y(x)$ dipende dal segno della derivata.

Relazione economica tra due variabili

diretta ($m > 0$): se x aumenta di una unità, y aumenta di (circa) m unità,

inversa ($m < 0$): se x aumenta di una unità, y diminuisce di (circa) m unità,

assente ($m = 0$): se x aumenta di una unità, y non varia.

Non derivabilità — 1

1. **Punti di discontinuità:**

   1° tipo - limite destro e limite sinistro di $y(x)$ non coincidono

$$\lim_{x \to x_0^+} y(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} y(x)$$

   2° tipo - asintoto verticale, cioè almeno un limite (destro o sinistro) non assume valore finito

$$\lim_{x \to x_0^+} y(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^-} y(x) = \pm\infty$$

   3° tipo - discontinuità "eliminabile", cioè

$$\lim_{x \to x_0^+} y(x) = \lim_{x \to x_0^-} y(x),$$

   ma $y(x)$ non è definita in $x = x_0$ ($x_0 \notin X$).

   (esempio: punto $x_0 = 0$ nella funzione $y(x) = \frac{x^2 - x}{x}$)

2. **Casi particolari:**

punti angolosi e cuspidi - derivata destra e sinistra esistono, ma non coincidono, cioè

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0^-} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$$

(esempio: funzioni coi valori assoluti)

punti/flessi a tangente verticale - la derivata destra e/o sinistra tende all'infinito,cioè

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

(esempio: $y(x) = \sqrt{x}$)

Non derivabilità — 3

Corollari:

1. La funzione $y(x)$ è derivabile in $x = x_0$ se e solo se ammette derivata destra e derivata sinistra finite e coincidenti.
2. La derivabilità è una condizione sufficiente per la continuità infatti, se la funzione $y(x)$ è derivabile in $x = x_0$ allora è anche continua in $x = x_0$.
3. La continuità è una condizione necessaria, ma non sufficiente per la derivabilità.

Segno delle derivate

Derivata prima:

- $\dfrac{\partial y(x)}{\partial x} > 0 \Rightarrow y(x)$ è crescente,
- $\dfrac{\partial y(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow y(x)$ è costante o orizzontale,
- $\dfrac{\partial y(x)}{\partial x} < 0 \Rightarrow y(x)$ è decrescente.

Derivata seconda:

- $\dfrac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} > 0 \Rightarrow y(x)$ è convessa,
- $\dfrac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow y(x)$ è lineare,
- $\dfrac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow y(x)$ è concava.

Derivate in generale — 1

Data la funzione di più variabili $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, è possibile

1. calcolare la derivata rispetto a ciascuna componente $\dfrac{\partial y(\cdot)}{\partial x_i}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$,
2. collocare tutte le n derivate all'interno del **vettore gradiente**

$$\nabla(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y(\cdot)}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial y(\cdot)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y(\cdot)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Derivate in generale — 2

3. collocare tutte le $\dfrac{n(n+1)}{2}$ derivate seconde all'interno della **matrice Hessiana**

$$H(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

dove risulta $\dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 y(\cdot)}{\partial x_j \partial x_i}$ per ogni i, j (matrice simmetrica).

Annullamento derivate

Condizione del primo ordine: Annullamento della derivata prima

$$\frac{\partial y(\cdot)}{\partial x} = 0,$$

rappresenta la condizione necessaria e sufficiente per l'ottenimento dei **punti stazionari** della funzione $y(x)$.

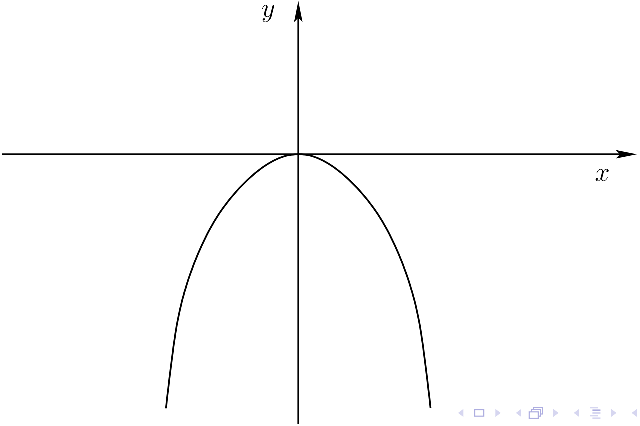
Punti stazionari:

- punti di massimo assoluto e/o relativo,
- punti di minimo assoluto e/o relativo,
- punti di sella (solo nelle funzioni di più variabili).

Punto di massimo (Funzione di una variabile)

Si ottiene un punto di massimo $x = x_0$ quando risulta:

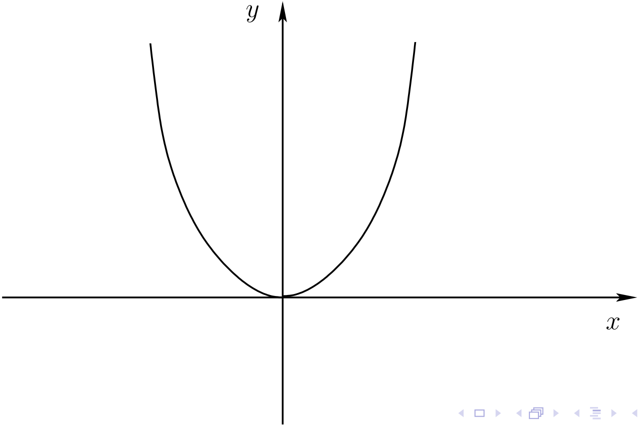
- Condizione del 1^o ordine: $\dfrac{\partial y(x)}{\partial x} = 0 \rightarrow$ derivata 1^a nulla
- Convessità: $\dfrac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} < 0 \rightarrow$ derivata 2^a negativa



Punto di minimo (Funzione di una variabile)

Si ottiene un punto di minimo $x = x_0$ quando risulta:

- Condizione del 1^o ordine: $\dfrac{\partial y(x)}{\partial x} = 0 \rightarrow$ derivata 1^a nulla
- Convessità: $\dfrac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} > 0 \rightarrow$ derivata 2^a positiva

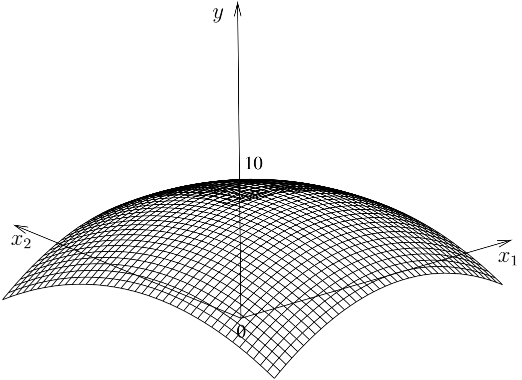


Punto di massimo (Funzione di più variabili)

Si ottiene un punto di massimo $x = x_0$ quando risulta:

- Condizione del 1^o ordine: $\nabla(x_0) = 0 \rightarrow$ gradiente nullo
- Concavità: $H(x_0) \rightarrow$ Hessiana definita negativa

(intuitivamente elementi diagonali negativi)

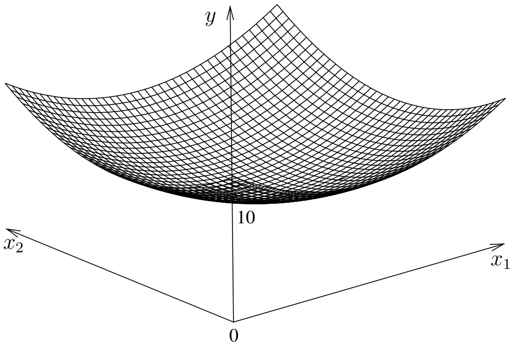


Punto di minimo (Funzione di più variabili)

Si ottiene un punto di minimo $x = x_0$ quando risulta:

- Condizione del 1^o ordine: $\nabla(x_0) = 0 \rightarrow$ gradiente nullo
- Concavità: $H(x_0) \rightarrow$ Hessiana definita positiva

(intuitivamente elementi diagonali positivi)

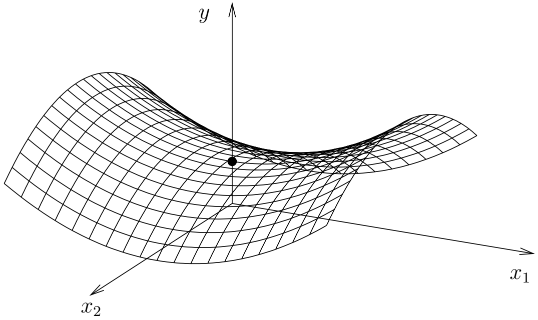


Punto di sella (Funzione di più variabili)

Si ottiene un punto di sella $x = x_0$ quando risulta:

- Condizione del 1^o ordine: $\nabla(x_0) = 0 \rightarrow$ gradiente nullo
- Concavità: $H(x_0) \rightarrow$ Hessiana non definita

(elementi diagonali con segno diverso)



La retta

La retta è una particolare **funzione di una variabile** che assume una fondamentale rilevanza nell'ambito delle scienze economiche. In generale è definita dalla seguente equazione

$$y = mx + q,$$

dove

- $m = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ è il **coefficiente angolare**, ovvero l'indicatore della pendenza (o inclinazione) della retta, infatti
    - se $m > 0$ la retta è **crescente**,
    - se $m = 0$ la retta è **piatta** o **orizzontale**,
    - se $m < 0$ la retta è **decrescente**,
    - se $m \to \pm\infty$ (derivata non definita) la retta tende alla posizione **verticale**.
- q è l'**intercetta**, cioè il valore della funzione quando $x = 0$; graficamente l'intercetta è il punto di intersezione tra la retta e l'asse delle y.

Proprietà della retta

La retta $y = mx + q$ è

1. un caso particolare ($n = 1$) della funzione di più variabili

$$y = q + m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_{n-1}x_{n-1}$$

   a quale definisce

   - un **piano** nello spazio a 3 dimensioni ($n = 3$),
   - un **iperpiano** nello spazio a più dimensioni ($n > 3$);

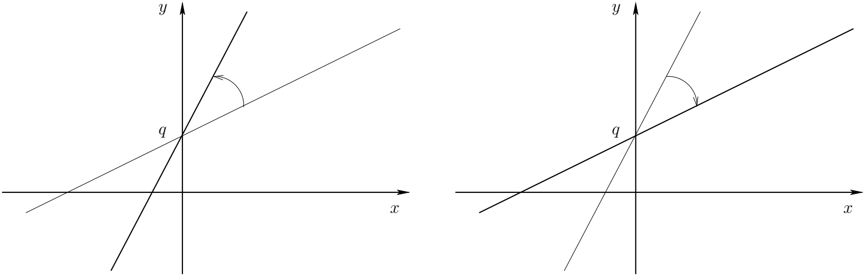
2. una funzione **lineare** o di **primo grado**, cioè nella sua equazione le variabili esplicative $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono elevate alla potenza 1;
3. sempre caratterizzata dai due parametri m e q (coefficiente angolare e intercetta).

Variazioni del coefficiente angolare

Una variazione del coefficiente angolare all'interno dell'equazione $y = mx + q$ provoca una **rotazione** della retta con centro di rotazione nell'intercetta.

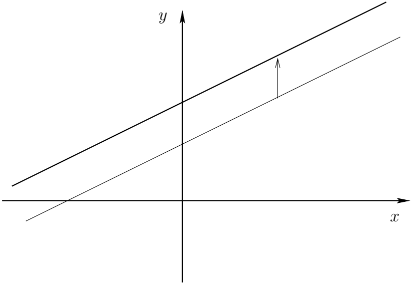
aumento di $m > 0$
retta più "ripida"

diminuzione di $m > 0$
retta più "piatta"

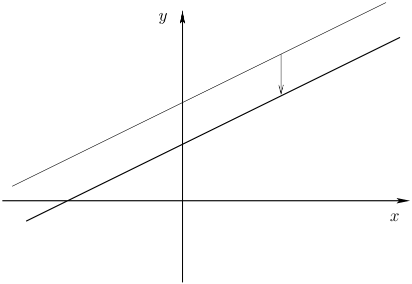


Una variazione dell'intercetta all'interno dell'equazione $y = mx + q$ provoca uno **spostamento parallelo** della retta.

aumento di q
spostamento verso l' "alto"



diminuzione di q
spostamento verso il "basso"



Variazioni

Variazione **assoluta** $\longrightarrow$ l'unità di misura di x è mantenuta

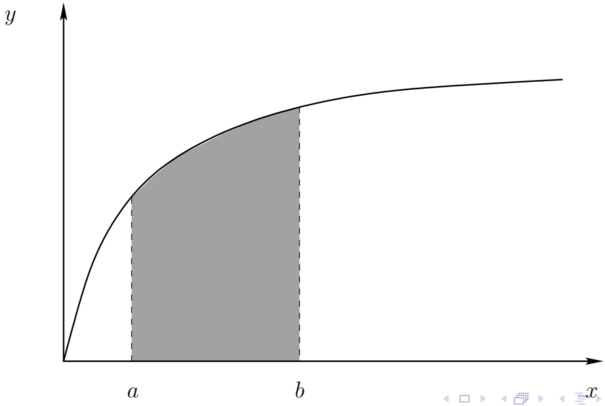
- distanza $\Delta x = x_1 - x_0$,
- infinitesima $\partial x = x_1 - x_0$, dove $x_1 \to x_0$.

Variazione **relativa** o **percentuale** $\longrightarrow$ numero puro

- incremento dal valore iniziale $\dfrac{\Delta x}{x_0} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_0}$,
- incremento infinitesimo dal valore iniziale $\dfrac{\partial x}{x}$, dove $\partial x \to 0$.

Data una funzione $y = f(x)$ non negativa, l'integrale definito in un dato intervallo $[a, b]$ rappresenta l'**area** (A) compresa tra

- il grafico della funzione $f(x)$,
- l'asse delle ascisse,
- le due rette verticali $x = a$ e $x = b$.



Definizione:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

dove

- $f(x)$ è la funzione **integranda**,
- dx è il **differenziale** di x,
- a e b sono gli **estremi di integrazione**,
- A è l'**integrale** o **area** sottesa da $f(x)$.

Come si calcola?

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

dove $F(x)$ è detta **primitiva** di $f(x)$, cioè $f(x) = \dfrac{\partial F(x)}{\partial x}$.

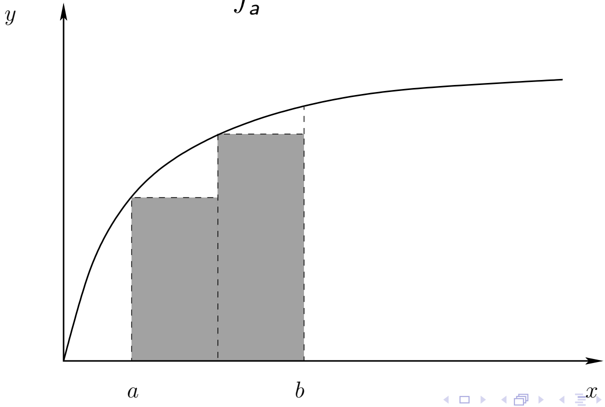
Approssimazione dell'area — 2 rettangoli

Definizione:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

dove

- $f(x)$: "altezza" dei rettangoli,
- $dx = (b-a)/2$: "base" dei rettangoli,
- $\int_a^b$: "somma di tutte le aree" tra a e b.



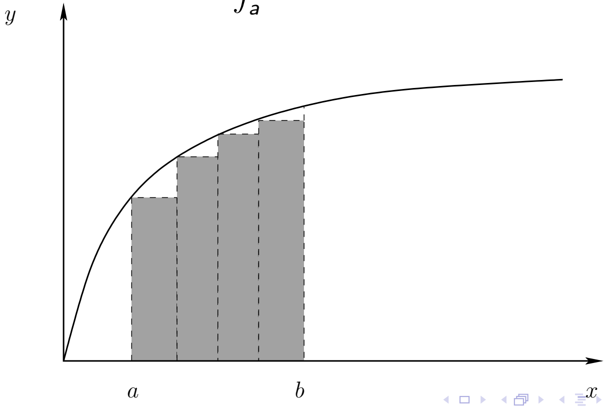
Approssimazione dell'area — 4 rettangoli

Definizione:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

dove

- $f(x)$: "altezza" dei rettangoli,
- $dx = (b-a)/4$: "base" dei rettangoli,
- $\int_a^b$: "somma di tutte le aree" tra a e b.



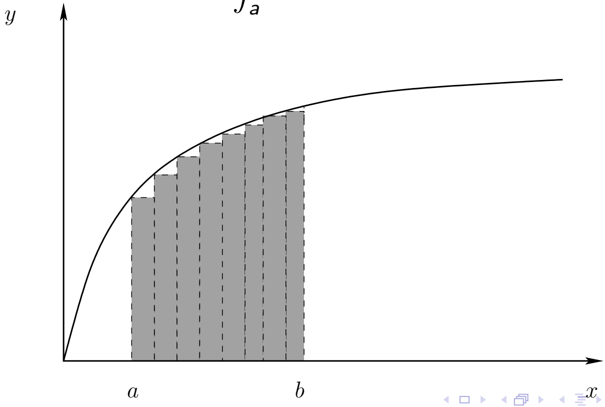
Approssimazione dell'area — 8 rettangoli

Definizione:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

dove

- $f(x)$: "altezza" dei rettangoli,
- $dx = (b-a)/8$: "base" dei rettangoli,
- $\int_a^b$: "somma di tutte le aree" tra a e b.



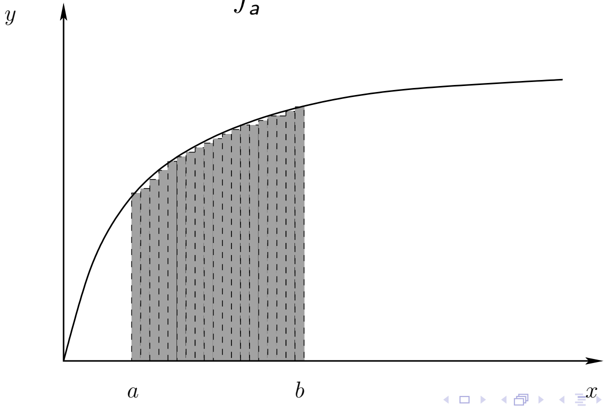
Approssimazione dell'area — 16 rettangoli

Definizione:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

dove

- $f(x)$: "altezza" dei rettangoli,
- $dx = (b-a)/16$: "base" dei rettangoli,
- $\int_a^b$: "somma di tutte le aree" tra a e b.



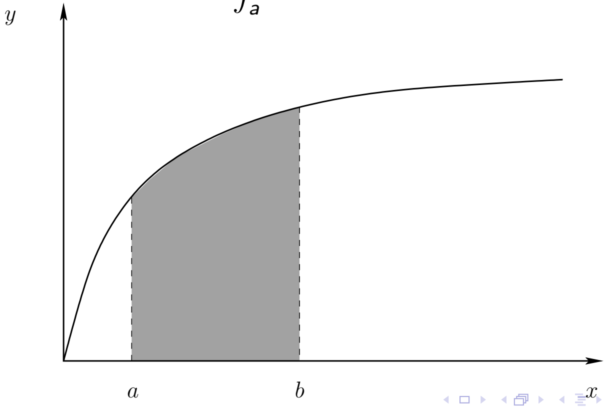
Approssimazione dell'area — $n \to \infty$ rettangoli

Definizione:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

dove

- $f(x)$: "altezza" dei rettangoli,
- $dx = (b-a)/\infty \to 0$: "base" dei rettangoli,
- $\int_a^b$: "somma di tutte le aree" tra a e b.



Differenziale (cenni)

Intuitivamente il differenziale in un punto $x = x_0$ di una funzione $y = y(x)$ derivabile in x_0, al variare di x misura la **distanza** tra la retta tangente a $y(x)$ in x_0 ed il grafico della funzione $y(x)$ stessa. Tale distanza misura perciò l'errore che si commette quando si approssima la variazione "vera" $\Delta y(x)$ attraverso la variazione infinitesima dy.

Ciò che tipicamente interessa in Economia Politica è la relazione

$$dy = \frac{\partial y(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y(x)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y(x)}{\partial x_n} dx_n,$$

cioè il differenziale della funzione di più variabili dy è dato dalla somma dei differenziali delle singole variabili esplicative, ponderati per le rispettive derivate parziali.

Funzione logaritmo — 1

Logaritmo: esponente che occorre dare alla base per ottenere l'argomento

$$\log_a x = b,$$

dove a è la base, b il logaritmo (esponente) e x è l'argomento.

Nelle Scienze Economiche ha particolare rilevanza la funzione **logaritmo naturale**

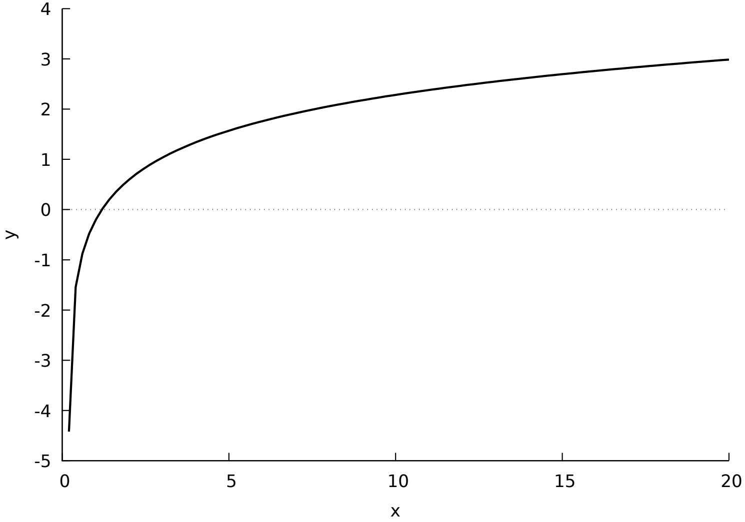
$$y(x) = \ln x,$$

dove $y(x)$ è il logaritmo naturale (esponente), x è l'argomento, mentre la base è data dalla soluzione del limite notevole

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2.7183$$

Funzione logaritmo — 2

Grafico



Proprietà:

- funzione definita per argomenti positivi ($x > 0$),
- funzione continua in tutto il dominio $x > 0$,
- funzione passante per il punto $A \equiv (1, 0)$
- $\lim_{x \to \infty^+} \ln x = -\infty$,
- funzione monotòna crescente: applicata ad una variabile x, ai valori x_{max} e x_{min} corrispondono $y(x)_{\text{max}}$ e $y(x)_{\text{max}}$,
- riduce il *range*: applicata ad una variabile $x > 1$, risulta sempre $y(x)_{\text{max}} - y(x)_{\text{min}} < x_{\text{max}} - x_{\text{min}}$,
- $\ln x^\alpha y^\beta = \alpha \ln x + \beta \ln y \qquad \text{e} \qquad \ln \dfrac{x^\alpha}{y^\beta} = \alpha \ln x - \beta \ln y$,
- $\dfrac{\partial \ln f(x)}{\partial x} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.