UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

Dipartimento di Economia

Variabili Casuali

Giulio Palomba

Indice

1 Introduzione

Questo capitolo costituisce una rassegna di alcune variabili casuali di particolare interesse tra quelle esistenti in letteratura. L'unica distinzione è quella che si effettua tra le variabili casuali discrete e quelle continue: ad eccezione dei casi in cui è diversamente specificato, il supporto della variabile casuale discreta è dato dall'insieme dei numeri naturali ($x \in \mathbb{N}$), mentre il supporto della variabile casuale continua risulta essere quello dei numeri reali ($x \in \mathbb{R}$).

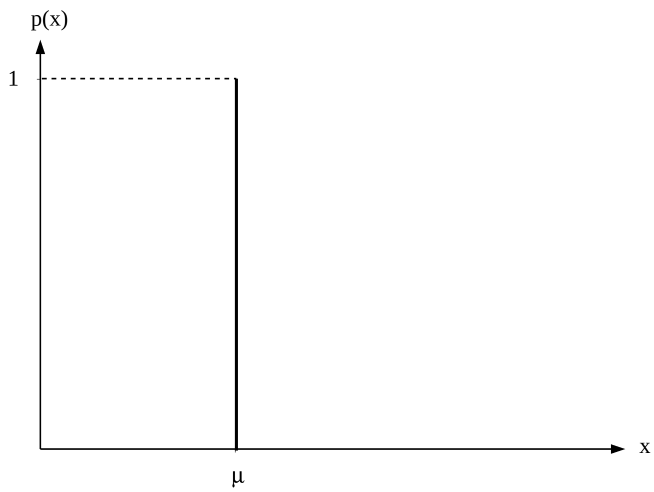
2 Variabili casuali discrete

2.1 Variabile casuale degenere

La variabile casuale degenere è caratterizzata dal fatto che tutta la probabilità è associata ad un solo evento casuale (μ).
La sua funzione di probabilità risulta:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } X = \mu \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad [2.1]$$

Figura 2.1 – Funzione di probabilità della variabile casuale degenere



I momenti di questa distribuzione sono:

1. $E(X) = \mu$
2. $Var(X) = 0$

La variabile casuale degenere è l'unica ad avere varianza nulla, mentre tutte le altre distribuzioni hanno sempre una varianza positiva. Ovviamente per questo tipo di variabile casuale la moda, la mediana ed il valore atteso coincidono.

2.2 Variabile casuale Bernoulliana

Ogniqualvolta si istaura un'alternativa dicotomica all'interno di un esperimento casuale si utilizza la variabile casuale Bernoulliana[1]. L'insieme ambiente Ω è costituito da soli due eventi E e $\bar{E}$ tra loro complementari; all'evento E (evento successo), che si realizza con probabilità p, è assegnato il valore 1, mentre all'evento $\bar{E}$ (evento insuccesso), che si realizza con probabilità $(1-p)$, è assegnato il valore 0. In sintesi:

x_i	$p(x_i)$
1	p
0	$1-p$

Data la tabella di cui sopra, la funzione di probabilità della variabile casuale Bernoulliana è immediata:

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad [2.2]$$

dove $x = 0, 1$ e $0 \leq p \leq 1$.

$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = 1$$

Dimostrazione:

$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = \sum_{x=0}^{1} p^x(1-p)^{1-x}$$
$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = \sum_{x=0}^{1} p^0(1-p)^1 + p^1(1-p)^0$$
$$\sum_{x=0}^{1} p(x) = 1 - p + p = 1$$

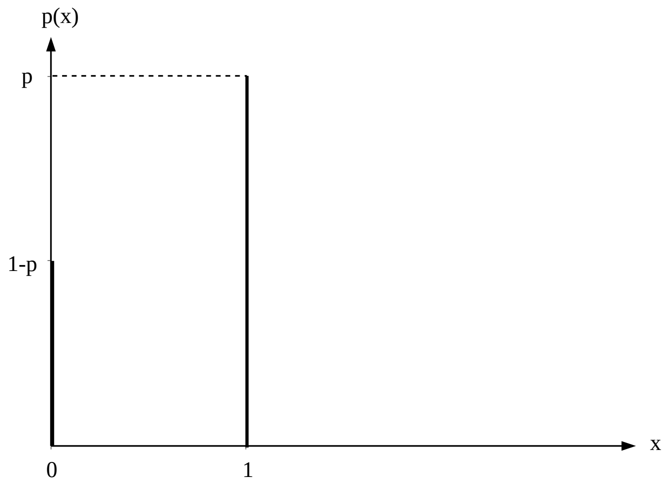
La moda e la mediana dipendono dalla probabilità di successo p:

- Se $p \geq 0.5 \Rightarrow$ moda$=X_{0.5} = 1$

- Se $p \leq 0.5 \Rightarrow$ moda$=X_{0.5} = 0$

[1] La variabile casuale Bernoulliana è detta anche "variabile casuale bipuntuale".

Figura 2.2 – Funzione di probabilità della variabile casuale Bernoulliana dove risulta $p > 0.5$



Il momento di ordine s della variabile casuale Bernoulliana è sempre pari a p, infatti:

$$E(X^s) = 0^s \cdot p^0(1-p)^1 + 1^s \cdot p^1(1-p)^0$$
$$E(X^s) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Da questa proprietà deriva che:

1. $E(X) = p$
2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
   $Var(X) = p - p^2$
   $Var(X) = p(1-p)$

2.3 Variabile casuale binomiale

Si considerino n prove indipendenti[2] che danno esito di tipo dicotomico. Le prove danno luogo perciò ad n variabili casuali Bernoulliane (X_i).
Ipotizzando costante la probabilità di succeso p, la variabile casuale binomiale (B) è data dalla somma di tutte le variabili casuali Bernoulliane ottenute,

[2] Una prova è indipendente da un'altra quando l'esito dell'una non influenza l'esito dell'altra.

quindi si ha:

$$B = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad [2.3]$$

La variabile casuale binomiale indica il numero di volte che in n prove si è realizzato l'evento successo quindi essa può assumere $n+1$ valori in quanto risulta:

$$0 \leq B \leq n$$

Per determinare la funzione di probabilità della variabile casuale binomiale occorre stabilire quante volte si realizza l'evento successo; poiché gli eventi sono tra loro incompatibili per definizione, l'ordine dei risultati ottenuti non influenza il calcolo delle probabilità.
A questo punto si può ipotizzare che le prime x prove diano esito E, mentre le rimanenti $n-x$ prove diano esito $\bar{E}$. L'esperimento casuale può essere riassunto attraverso la segente tabella:

	successi	insuccessi
eventi	$\underbrace{E, E, E, \ldots, E}_{x \text{ volte}}$	$\underbrace{\bar{E}, \bar{E}, \bar{E}, \ldots, \bar{E}}_{n-x \text{ volte}}$
probabilità	$\underbrace{p, p, p, \ldots, p}_{x \text{ volte}}$	$\underbrace{1-p, 1-p, 1-p, \ldots, 1-p}_{n-x \text{ volte}}$

Dato che le prove sono indipendenti, per ricavare la funzione di probabilità della variabile casuale binomiale, si utilizza il principio della probabilità composta,[3] quindi risulta:

$$p(B) = Pr(E \cap E \cap \ldots \cap E \cap \bar{E} \cap \bar{E} \ldots \cap \bar{E})$$
$$p(B) = Pr(E)Pr(E) \ldots Pr(E)Pr(\bar{E})Pr(\bar{E}) \ldots Pr(\bar{E})$$
$$p(B) = p \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)$$

Tenendo conto che l'evento E si realizza x volte e l'evento $\bar{E}$ si verifica $n-x$ volte, la funzione di probabilità della variabile casuale binomiale risulta:

$$p(B) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad [2.4]$$

[3] Dati n eventi indipendenti, la legge della probabilità composta è definita dalla seguente espressione:

$$Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} Pr(E_i)$$

dove $\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}$ è il COEFFICIENTE BINOMIALE[4] che indica il numero delle configurazioni equiprobabili[5] che soddisfano la funzione di probabilità.

$$\sum_{x=0}^{n} p(B) = 1$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Per effettuare questa dimostrazione occorre utilizzare lo sviluppo del polinomio di Newton.

$$\sum_{x=0}^{n} p(B) = \sum_{x=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$\sum_{x=0}^{n} p(B) = [p + (1-p)]^n$$
$$\sum_{x=0}^{n} p(B) = 1^n = 1$$

Il coefficiente binomiale si ottiene mediante l'utilizzo di alcune semplici regole di calcolo combinatorio, infatti:

$$\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot x}$$
$$\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot x} \cdot \frac{(n-x)(n-x-1)\dots 1}{(n-x)(n-x-1)\dots 1}$$
$$\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad [2.5]$$

Considerando il fatto che la variabile casuale binomiale è la somma di n variabili casuali Bernoulliane (X_i) indipendenti, i suoi momenti sono:

1. $E(B) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

   $E(B) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

[4]Il coefficiente binomiale deriva dallo sviluppo del polinomio di Newton che risulta essere il seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} a^x b^{n-x}$$

Il coefficiente binomiale si ottiene ponendo $a = p$ e $b = 1-p$.

[5]Dati n ed x, esistono diverse combinazioni di successi ed insuccessi che generano lo stesso risultato se sostituite all'interno della funzione. Attraverso il coefficiente binomiale è possibile calcolare il loro numero esatto.

$$E(B) = \sum_{i=1}^{n} p$$
$$E(B) = np$$

2. $$Var(B) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$Var(B) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
$$Var(B) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p)$$
$$Var(B) = np(1-p)$$

Esempio 2.1 *Una macchina produce pezzi difettosi pari al* 2% *del totale dei pezzi prodotti. Tali pezzi sono confezionati in scatole da* 10.
Sapendo che la garanzia è che ogni scatola contenga non più di un pezzo difettoso, determinare la probabilità che la scatola non soddisfi la garanzia.

Per risolvere il problema occorre utilizzare la variabile casuale binomiale con:

- $n = 10$*: numero di prove*
- x*: numero pezzi difettosi*
- $p = 0.02$*: probabilità che il pezzo risulti difettoso*
- $(1-p) = 0.98$*: probabilità che il pezzo non risulti difettoso*

$$p(B) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Sostituendo:

$$p(B) = \binom{10}{x} 0.02^x \cdot 0.98^{10-x}$$

La probabilità che la garanzia sia soddisfatta è data dal fatto che la variabile casuale assuma valore 0 oppure 1, quindi occorre calcolare $Pr(B \leq 1)$.

$$Pr(B=0) = \binom{10}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{10}$$
$$Pr(B=0) = \frac{10!}{0!10!} 1 \cdot 0.817 = 0.817$$

dove per convenzione vale la relazione $0! = 1$.

$$Pr(B=1) = \binom{10}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^9$$
$$Pr(B=1) = \frac{10!}{1!9!} 0.02 \cdot 0.834 = 0.167$$

La probabilità che la garanzia sia rispettata all'interno delle scatole è:

$$Pr(B \leq 1) = Pr(B = 0) + Pr(B = 1)$$
$$Pr(B \leq 1) = 0.817 + 0.167 = 0.984$$

Esempio 2.2 *Calcolare moda, mediana, valore atteso e varianza della variabile casuale binomiale $B(n = 6, p = 0.3)$. Per determinare la moda occorre calcolare la funzione di probabilità in corrispondenza di ciascun evento casuale che compone il suo dominio.*

$$Pr(B = 0) = \binom{6}{0} 0.3^0 \cdot 0.7^6 = 0.117649$$
$$Pr(B = 1) = \binom{6}{1} 0.3^1 \cdot 0.7^5 = 0.302526$$
$$Pr(B = 2) = \binom{6}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^4 = 0.324135$$
$$Pr(B = 3) = \binom{6}{3} 0.3^3 \cdot 0.7^3 = 0.185220$$
$$Pr(B = 4) = \binom{6}{4} 0.3^4 \cdot 0.7^2 = 0.059535$$
$$Pr(B = 5) = \binom{6}{5} 0.3^5 \cdot 0.7^1 = 0.010206$$
$$Pr(B = 6) = \binom{6}{6} 0.3^6 \cdot 0.7^0 = 0.000729$$

Quando $B = 2$ si ottiene il valore più alto della probabilità, quindi

$$moda = 2$$

Dato che valgono rispettivamente $Pr(X \leq 1) = Pr(B = 0) + Pr(B = 1) = 0.420175$ e $Pr(X \leq 2) = Pr(B = 0) + Pr(B = 1) + Pr(B = 2) = 0.7443$, la mediana risulta essere:

$$X_{0.5} = 2$$

Il valore atteso è pari a:

$$E(B) = np = 6 \cdot 0.3 = 1.8$$

La varianza è pari a:

$$Var(B) = np(1 - p) = 6 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 1.26$$

2.4 Variabile casuale geometrica

La variabile casuale geometrica è una variabile casuale discreta che assume un'infinità numerabile di valori. Essa corrisponde al numero di estrazioni necessarie affinché si ottenga l'evento E, detto evento "successo". Come nella variabile casuale Bernoulliana l'insieme ambiente Ω è costituito dagli eventi complementari E e $\bar{E}$ che si verificano rispettivamente con probabilità p e $(1 - p)$. Effettuando l'esperimento casuale può accadere che:

- Alla prima estrazione si ottiene E: l'esperimento termina.
- Alla prima estrazione si ottiene $\bar{E}$: si effettua un'altra estrazione. In questo caso alla seconda estrazione si pone la stessa alternativa. L'esperimento casuale viene ripetuto finché non si ottiene l'evento E.

Dato che la variabile casuale geometrica è il numero di estrazioni necessarie per ottenere l'evento successo, risulta che il supporto è dato da tutti i numeri interi tali che:

$$x \in [1, +\infty)$$

Dato che l'evento successo si realizza all'x-esima estrazione, significa che nelle precedenti $(x-1)$ estrazioni si sono verificati solo insuccessi. La funzione di probabilità della variabile casuale geometrica è perciò la seguente:

$$p(x) = p(1-p)^{x-1} \qquad [2.6]$$

Sfruttando il concetto di convergenza di una serie geometrica[6] è possibile dimostrare la condizione fondamentale:

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = 1$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \dots$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = p[1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots]$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

[6]Dato $0 \leq p \leq 1$, si costruisce la serie geometrica S_n.

$$S_n = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1}$$
$$S_n = [1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots]$$

Il risultato fondamentale per tale tipo di serie è:

$$\lim_{x \to +\infty} S_n = \frac{1}{p}$$

Questa proprietà risulterà fondamentale anche per il calcolo del valore atteso e della varianza della variabile casuale geometrica.

I momenti della variabile casuale geometrica sono:

1. $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}$

   $E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}$

   Dato che $x(1-p)^{x-1}$ è la derivata rispetto a p della funzione $-(1-p)^x$:

   $$E(X) = p\sum_{x=1}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial p}(1-p)^x$$
   $$E(X) = -p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x$$

   Per la convergenza della serie geometrica S_n, si ottiene:

   $$E(X) = -p\frac{\partial(1/p)}{\partial p}$$
   $$E(X) = -p\left(-\frac{1}{p^2}\right)$$
   $$E(X) = \frac{1}{p}$$

2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $$Var(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2p(1-p)^{x-1} - \frac{1}{p^2}$$
   $$Var(X) = p\sum_{x=1}^{\infty}[x(x-1)+x](1-p)^{x-1} - \frac{1}{p^2}$$
   $$Var(X) = p(1-p)\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)(1-p)^{x-2} + p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} - \frac{1}{p^2}$$

   Il secondo addendo è il valore atteso della variabile casuale geometrica. Dato che $x(x-1)(1-p)^{x-2}$ è la derivata seconda rispetto a p di $(1-p)^x$:

   $$Var(X) = p(1-p)\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial p^2}(1-p)^x + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$
   $$Var(X) = p(1-p)\frac{\partial^2}{\partial p^2}\sum_{x=2}^{\infty}(1-p)^x + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

   Per la convergenza della serie geometrica S_n, si ottiene:

   $$Var(X) = p(1-p)\frac{\partial^2(1/p)}{\partial p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$Var(X) = p(1-p)\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$
$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2.5 Variabile casuale Poissoniana

La variabile casuale Poissoniana[7] è una variabile casuale discreta che assume un'infinità numerabile di valori, infatti il suo supporto è:

$$x \in [0, +\infty]$$

Essa è solitamente utilizzata per descrivere il numero delle manifestazioni di un dato fenomeno all'interno di un intervallo di tempo o in uno spazio. Essa inoltre è impiegata quando non è noto l'estremo superiore dell'insieme di definizione degli eventi x. La sua funzione di probabilità è:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad [2.7]$$

dove $\lambda > 0$. Per dimostrare la condizione fondamentale si utilizza lo sviluppo in serie di McLaurin[8] relativo al termine e^λ, infatti:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$$

Dimostrazione:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$
$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

---

[7]Tale variabile casuale è detta anche "Legge dei piccoli numeri" o "Legge degli eventi rari".

[8]Lo sviluppo in serie di McLaurin è dato dalla seguente espressione:

$$e^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}$$
$$e^\lambda = \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{x!}$$

dove n può assumere anche valore infinito.

Attraverso l'utilizzo dello sviluppo in serie di McLaurin è possibile determinare i momenti della variabile casuale Poissoniana, che risultano essere:

1. $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

   $E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$

   $E(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$

   $E(X) = \lambda$

2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

   $Var(X) = \left[\sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right] - \lambda^2$

   $Var(X) = \left[\sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \right] - \lambda^2$

   $Var(X) = \left[\sum_{x=0}^{\infty} \lambda(x+1-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right] - \lambda^2$

   $Var(X) = \left[\sum_{x=0}^{\infty} \lambda(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right] - \lambda^2$

   $Var(X) = \left[\lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right] - \lambda^2$

   $Var(X) = [\lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}] - \lambda^2$

   $Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$

   $Var(X) = \lambda$

La variabile casuale Poissoniana gode dell'esclusiva proprietà di uguaglianza tra valore atteso e varianza che assumono come valore il parametro λ.

Esempio 2.3 *Alla cassa di un supermercato arrivano mediamente tre persone al minuto: qual è la probabilità che si formi una coda?*

$$E(X) = \lambda = 3$$

La coda si forma quando alla cassa giungono contemporaneamente almeno due persone, quindi la probabilità da calcolare è $Pr(X > 1)$.

$$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$Pr(X > 1) = 1 - Pr(X \leq 1)$$

$$
\begin{aligned}
Pr(X > 1) &= 1 - Pr(X = 0) - Pr(X = 1) \\
Pr(X > 1) &= 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} - e^{-3}\frac{3^1}{1!} \\
Pr(X > 1) &= 1 - e^{-3} - 3e^{-3} \\
Pr(X > 1) &= 1 - 4e^{-3} \\
Pr(X > 1) &= 0.800852
\end{aligned}
$$

Teorema

Data la funzione di probabilità di una variabile casuale binomiale con:

1. *un valore della numerosità delle prove molto alto da rendere difficile il calcolo delle probabilità ($n \to \infty$)*

2. *$p \neq (1-p)$ con un alto valore di differenza ($p \to 0$)*

Si usa la variabile casuale Poissoniana come approssimazione della binomiale con $E(X) = np = \lambda$.

<u>*Dimostrazione:*</u>

La dimostrazione consiste nel calcolare il seguente limite per la funzione di probabilità della variabile casuale binomiale.

$$
\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}
$$

$$
\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}
$$

Moltiplicando e dividendo per n^x:

$$
\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x!n^x} n^x p^x (1-p)^{n-x}
$$

$$
\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \frac{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\dots\frac{(n-x+1)}{n}}{x!} (np)^x (1-p)^{n-x}
$$

$$
\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \frac{1}{x!}\left[\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\dots\frac{(n-x+1)}{n}\right] (np)^x \frac{(1-p)^n}{(1-p)^x}
$$

Il limite per $n \to \infty$ di tutti i rapporti contenuti all'interno della parentesi quadra è pari ad 1. Moltiplicando e dividendo per n il termine p all'interno del numeratore dell'ultimo rapporto, rimane:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \frac{1}{x!}(np)^x \frac{\left(1 - \frac{np}{n}\right)^n}{(1-p)^x}$$

Sfruttando il limite notevole $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, si ha:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = \frac{1}{x!}(np)^x e^{-np}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} p(B) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

dove $\lim_{p \to 0}(1-p)^x = 1$ e $\lambda = np$.

Esempio 2.4 *Data la funzione di probabilità della variabile casuale binomiale $B(n = 200, p = 0.01)$, calcolare $Pr(X = 1)$.*

Utilizzando la funzione di probabilità della variabile casuale binomiale risulta:

$$Pr(X = 1) = \binom{200}{1} 0.01 \cdot (0.99)^{199}$$

Poiché le ipotesi del teorema ($n \to \infty$ e $p \to 0$) sono rispettate, si può utilizzare l'approssimazione attraverso la variabile casuale Poissoniana con $\lambda = np = 2$.

$$Pr(X = 1) = e^{-2} \frac{2^1}{1!}$$
$$Pr(X = 1) = 2e^{-2}$$
$$Pr(X = 1) = 0.270671$$

---

3 Variabili casuali continue

3.1 Variabile casuale beta

La distribuzione beta ha la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{se } x \in [0,1] \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad [3.1]$$

dove $a, b > 0$ sono i parametri che determinano la forma della funzione di densità e $B(a,b)$ è la funzione beta[1]. Per $x \in [0,1]$ la condizione fondamentale è la seguente:

$$\int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = 1 \qquad [3.2]$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Poiché la funzione beta restituisce un valore reale è possibile portarlo al di fuori dell'integrale quindi risulta:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{B(a,b)} B(a,b)$$
$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

Il generico momento dall'origine di ordine k della distribuzione beta è dato dalla seguente espressione:

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(k+a+b)\Gamma(a)} \qquad [3.3]$$

[1] Per la definizione e le proprietà della funzione beta si veda l'Appendice.

Dimostrazione:

$$E(X^k) = \int_0^1 \frac{1}{B(a,b)} x^k x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$
$$E(X^k) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{k+a-1}(1-x)^{b-1}dx$$
$$E(X^k) = \frac{B(k+a,b)}{B(a,b)}$$

Per le proprietà della funzione beta si ha:

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(b)}{\Gamma(k+a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$
$$E(X^k) = \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(a+b)}{\Gamma(k+a+b)\Gamma(a)}$$

Dalla [3.3] deriva che:

1. $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$

   Dimostrazione:

   Sostituendo $k = 1$ all'interno della [3.3] risulta:

   $$E(X) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)\Gamma(a)}$$
   $$E(X) = \frac{a!(a+b-1)!}{(a+b)!(a-1)!}$$
   $$E(X) = \frac{a}{a+b}$$

   ---

2. $Var(X) = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

   Dimostrazione:

   Per il calcolo della varianza si ricorre alla differenza tra il momento secondo ed il quadrato del momento primo:

   $$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

   Sostituendo $k = 2$ all'interno della [3.3] risulta perciò:

   $$Var(X) = \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+2)\Gamma(a)} - \frac{a^2}{(a+b)^2}$$
   $$Var(X) = \frac{(a+1)!(a+b-1)!}{(a+b+1)!(a-1)!} - \frac{a^2}{(a+b)^2}$$
   $$Var(X) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$Var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

Quando $a = b = 1$ risulta $B(a,b) = 1$ quindi la variabile casuale beta assume la forma di una variabile casuale uniforme[2] con la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad [3.4]$$

3.2 Variabile casuale gamma

La variabile casuale gamma è definita nell'insieme $x \in [0, +\infty)$ ed ha la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{e^{-x/b}}{b\Gamma(c)} \quad [3.5]$$

dove il parametro di spostamento $b > 0$ e il parametro di scala $c > 0$ sono quelli che caratterizzano la forma della funzione di densità e $\Gamma(c)$ è la funzione gamma[3].

All'interno del supporto della variabile casuale gamma deve valere:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad [3.6]$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Dato che la funzione gamma restituisce un numero reale per ogni valore dell'argomento $c > 0$, è possibile portarla fuori dall'integrale.

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{b\Gamma(c)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-x/b}dx$$

Ponendo $t = x/b$ si ha $dx = b\ dt$, quindi risulta:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{b\Gamma(c)} \int_0^{+\infty} t^{c-1}e^{-t}b\ dt$$
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{b}{b\Gamma(c)} \int_0^{+\infty} t^{c-1}e^{-t}dt$$

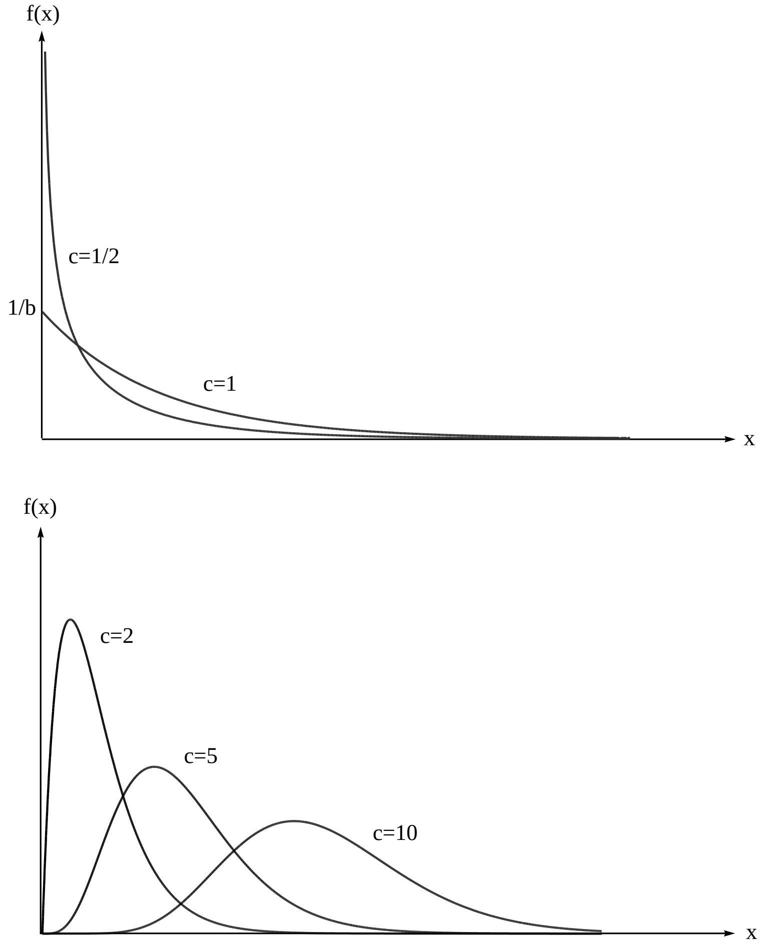
Poiché l'espressione all'interno dell'integrale equivale a $\Gamma(c)$ si ha:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

I momenti della variabile casuale gamma sono:

[2]Per la definizione e le proprietà della variabile casuale uniforme si veda la sezione 3.8.
[3]Per la definizione e le proprietà della funzione gamma si veda l'Appendice.

Figura 3.1 – Funzione di densità della variabile casuale gamma



1. $E(X) = bc$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} x \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{e^{-x/b}}{b\Gamma(c)} dx \\
E(X) &= \frac{1}{b\Gamma(c)} \int_0^{+\infty} b \left(\frac{x}{b}\right)^{c} e^{-x/b} dx
\end{aligned}
$$

Ponendo $t = x/b$ si ha $dx = b\ dt$, quindi:

$$E(X) = \frac{b}{\Gamma(c)} \int_0^{+\infty} t^c e^{-t} dx$$

Integrando per parti[4] si ottiene:

$$E(X) = \frac{b}{\Gamma(c)} \left[-t^c e^{-t} + \int_0^{+\infty} c\ t^{c-1} e^{-t} dt \right]$$

Poiché l'integrale equivale a $c\Gamma(c)$ risulta:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{b}{\Gamma(c)} \left| -t^c e^{-t} + c\Gamma(c) \right|_0^{+\infty} \\
E(X) &= \frac{b}{\Gamma(c)}\ c\Gamma(c) \\
E(X) &= bc
\end{aligned}
$$

---

2. $Var(X) = b^2 c$

Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
Var(X) &= \int_0^{+\infty} x^2 \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{e^{-x/b}}{b\Gamma(c)} dx - b^2 c^2
\end{aligned}
$$

Imponendo il solito cambio di variabile $t = x/b$ con $dx = b\ dt$ si ha:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_0^{+\infty} b^2 t^2 t^{c-1} \frac{e^{-t}}{b\Gamma(c)} b\ dt - b^2 c^2 \\
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)} \int_0^{+\infty} t^{c+1} e^{-t} dt - b^2 c^2
\end{aligned}
$$

[4] In particolare sono state poste:

$$
\begin{cases}
f' = e^{-t} & \Rightarrow \quad f = -e^{-t} \\
g = t^c & \Rightarrow \quad g' = ct^{c-1}
\end{cases}
$$

Integrando in modo ricorsivo per parti si ottiene[5]:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)}\left[-t^{c+1}e^{-t} + \int_0^{+\infty}(c+1)t^c e^{-t}dt\right] - b^2c^2 \\
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)}\left[-t^{c+1}e^{-t} + (c+1)\int_0^{+\infty}t^c e^{-t}dt\right] - b^2c^2 \\
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)}\left[-t^{c+1}e^{-t} - (c+1)t^c e^{-t} + (c+1)\int_0^{+\infty}ct^{c-1}e^{-t}dt\right] - b^2c^2 \\
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)}\left[-t^{c+1}e^{-t} - (c+1)t^c e^{-t} + c(c+1)\int_0^{+\infty}t^{c-1}e^{-t}dt\right] - b^2c^2
\end{aligned}
$$

Poiché l'integrale equivale alla funzione $\Gamma(c)$ risulta[6]:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)}\left[-t^{c+1}e^{-t} - (c+1)t^c e^{-t} + c(c+1)\Gamma(c)\right]_0^{+\infty} - b^2c^2 \\
Var(X) &= \frac{b^2}{\Gamma(c)}c(c+1)\Gamma(c) - b^2c^2 \\
Var(X) &= b^2(c^2 + c - c^2) \\
Var(X) &= b^2c
\end{aligned}
$$

PROPRIETÀ DELLA V.C. GAMMA:

1. La funzione di densità della variabile casuale gamma è asimmetrica con $\gamma_3 > 0$ per $\forall\ c$.

2. Quando $c = 1$ la funzione di densità della variabile casuale gamma è quella di una variabile casuale esponenziale[7] con parametro $\theta = 1/b$.

3. Quando $b = 2$ e $c = \frac{n}{2}$ la funzione di densità della variabile casuale gamma è quella di una variabile casuale chi-quadrato[8] con n g.d.l.

4. La somma di n variabili casuali gamma di parametri b e c_i è a sua volta una variabile casuale gamma con parametro di spostamento b e parametro di scala pari a:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

---

[5] In questo caso sono posti:

$$\begin{cases} f' = e^{-t} & f = -e^{-t} \\ g = t^{c+1} & g' = (c+1)t^c \end{cases}$$

[6] Si veda in proposito l'Appendice.

[7] Si veda in proposito la sezione 3.3.

[8] Si veda in proposito la sezione 4.1.

Dimostrazione:

Per la dimostrazione di questa proprietà si ricorre al metodo delle trasformazioni[9].

$$\begin{cases} Y_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y_2 = X_2 \\ \quad \vdots \\ Y_n = X_n \end{cases}$$

dove le X_i sono variabili casuali gamma indipendenti con parametri b e c_i. Poiché tutte le funzioni sono biunivoche si hanno le seguenti inverse:

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 - \sum_{i=2}^{n} Y_i \\ X_2 = Y_2 \\ \quad \vdots \\ X_n = Y_n \end{cases}$$

La matrice Jacobiana risulta essere la seguente:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è $|J| = 1$. Per la condizione di indipendenza la funzione di densità congiunta delle X_i è data da:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{b^\gamma} \exp\left\{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{c_i-1}}{\Gamma(c_i)}$$

dove $\gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i$. La funzione di densità congiunta delle Y_i si ottiene sostituendo.

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{e^{-y_1/b}}{b^\gamma} \frac{\left(y_1 - \sum_{i=2}^{n} y_i\right)^{c_1-1}}{\Gamma(c_1)} \prod_{i=2}^{n} \frac{y_i^{c_i-1}}{\Gamma(c_i)}$$

La distribuzione della somma di n variabili casuali gamma si ottiene calcolando la funzione di densità marginale di Y_1 data da:

$$f(y_1) = \int_0^{y_1} \int_0^{y_1-y_2} \dots \int_0^{y_1-\sum_{i=2}^{n-1} y_i} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_2 dy_3 \dots dy_n$$

Calcolando l'integrale rispetto a y_n si ha:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \Psi_n \int_0^{y_1-\sum_{i=2}^{n-1} y_i} \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n} y_i\right)^{c_1-1} y_n^{c_n-1} dy_n$$

[9]Si veda in proposito l'Appendice.

dove $\Psi_n = \frac{e^{-y_1/b}}{b^\gamma \prod_{i=1}^{n} \Gamma(c_i)} \prod_{i=2}^{n-1} y_i^{c_i-1}$.

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \Psi_n \int_0^{y_1-\sum_{i=2}^{n-1} y_i} \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)^{c_1-1} \left[1 - \frac{y_n}{y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i} \right]^{c_1-1} y_n^{c_n-1} dy_n$$

Ponendo $t = \frac{y_n}{y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i}$ con $dy_n = \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right) dt$ si ottiene:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = & \quad \Psi_n \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)^{c_1-1} \\ & \int_0^1 (1-t)^{c_1-1} t^{c_n-1} \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)^{c_n-1} \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right) dt \\ f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = & \quad \Psi_n \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)^{c_1+c_n-1} \int_0^1 t^{c_n-1} (1-t)^{c_1-1} dt \end{aligned}$$

Dato che l'integrale corrisponde alla funzione beta $B(c_n, c_1)$, risulta:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \Psi_n \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right)^{c_1+c_n-1} B(c_n, c_1)$$

Applicando lo stesso metodo e generalizzando per $2 < j < n$, per le proprietà della funzione beta si può dimostrare che:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_j) = \Psi_j \int_0^{y_1-\sum_{i=2}^{j-1} y_i} \left(y_1 - \sum_{i=2}^{n} y_i \right)^{c_1+\sum_{i=j}^{n} c_i - 1} y_j^{c_j-1} dj_n$$

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_j) = \Psi_j \left(y_1 - \sum_{i=2}^{j-1} y_i \right)^{c_1+\sum_{i=j}^{n} c_i - 1} \frac{\Gamma(c_1) \prod_{i=j+1}^{n} \Gamma(c_i)}{\Gamma\left(c_1 + \sum_{i=j+1}^{n} c_i \right)} B\left(c_j, c_1 + \sum_{i=j+1}^{n} c_i \right)$$

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_j) = \Psi_j \left(y_1 - \sum_{i=2}^{j-1} y_i \right)^{c_1+\sum_{i=j}^{n} c_i - 1} \frac{\Gamma(c_1) \prod_{i=j+1}^{n} \Gamma(c_i)}{\Gamma\left(c_1 + \sum_{i=j+1}^{n} c_i \right)} \frac{\Gamma(c_j) \Gamma\left(c_1 + \sum_{i=j+1}^{n} c_i \right)}{\Gamma\left(c_1 + \sum_{i=j}^{n} c_i \right)}$$

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_j) = \Psi_j \left(y_1 - \sum_{i=2}^{j-1} y_i \right)^{c_1+\sum_{i=j}^{n} c_i - 1} \frac{\Gamma(c_1) \prod_{i=j}^{n} \Gamma(c_i)}{\Gamma\left(c_1 + \sum_{i=j}^{n} c_i \right)}$$

Applicando questo risultato per $j = 2$ si ottiene la funzione di densità marginale[10]

[10]Si noti che in questo caso l'unica differenza rispetto alla formula risolutiva proposta è data dal fatto che la quantità tra parentesi è pari a y_1.

di y_1:

$$f(y_1) = \Psi_2 y_1^{c_1+\sum_{i=2}^n -1} \frac{\Gamma(c_1)\prod_{i=2}^n \Gamma(c_i)}{\Gamma\left(c_1 + \sum_{i=2}^n c_i\right)}$$

$$f(y_1) = \frac{y_1^{\gamma-1}e^{-y_1/b}}{b^\gamma \prod_{i=1}^n \Gamma(c_i)} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(c_i)}{\Gamma(\gamma)}$$

$$f(y_1) = \left(\frac{y_1}{b}\right)^{\gamma-1} \frac{e^{-y_1/b}}{b\Gamma(\gamma)}$$

---

5. Prese due variabili casuali gamma X_1 e X_2 indipendenti con parametro di spostamento $b = 1$ e con parametro di scala rispettivamente pari a c_1 e c_2, il rapporto $X_1/(X_1 + X_2)$ ha una la distribuzione di una variabile casuale beta con parametri c_1 e c_2.

<u>*Dimostrazione:*</u>

Applicando il metodo delle trasformazioni si ha:

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2} \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$$

Le funzioni inverse sono le seguenti:

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{Y_1 Y_2}{1 - Y_1} \\ X_2 = Y_2 \end{cases}$$

La matrice Jacobiana è:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1-Y_1)^2} & \dfrac{1}{1-Y_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché il determinante di tale matrice è $|J| = (1 - Y_1)^{-2}$, la funzione di densità congiunta di X_1 e X_2 è la seguente:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^{c_1-1} x_2^{c_2-1} e^{-x_1-x_2}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}$$

Applicando le trasformazioni:

$$f(y_1, y_2) = \frac{y_1^{c_1-1} y_2^{c_1-1} (1-y_1)^{-(c_1-1)} y_2^{c_2-1} e^{-\frac{y_1 y_2}{1-y_1} - y_2} (1-y_1)^{-2}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{y_1^{c_1-1} y_2^{c_1+c_2-1} (1-y_1)^{-c_1-1} e^{-\frac{y_2}{1-y_1}}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}$$

Integrando rispetto a y_2 si ottiene la funzione di densità marginale di y_1 quindi la distribuzione del rapporto $X_1/(X_1+X_2)$.

$$f(y_1) = \frac{y_1^{c_1-1}(1-y_1)^{-c_1-1}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)} \int_0^{+\infty} y_2^{c_1+c_2-1} e^{-\frac{y_2}{1-y_1}} dy_2$$

Ponendo $t = y_2(1-y_1){-}1$ con $dy_2 = (1-y_1)dt$ risulta:

$$f(y_1) = \frac{y_1^{c_1-1}(1-y_1)^{-c_1-1}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}(1-y_1)^{c_1+c_2-1}(1-y_1) \int_0^{+\infty} t^{c_1+c_2-1} e^{-t} dt$$

$$f(y_1) = \frac{y_1^{c_1-1}(1-y_1)^{c_2-1}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)} \int_0^{+\infty} t^{c_1+c_2-1} e^{-t} dt$$

Poiché l'integrale restitruisce la funzione gamma $\Gamma(c_1+c_2)$, per le propriatà della funzione beta si ottiene:

$$f(y_1) = \frac{y_1^{c_1-1}(1-y_1)^{c_2-1}}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}\Gamma(c_1+c_2)$$

$$f(y_1) = \frac{1}{B(c_1+c_2)} y_1^{c_1-1}(1-y_1)^{c_2-1}$$

---

6. La funzione di ripartizione della variabile casuale gamma ha la seguente forma:

$$F(x) = 1 - e^{-x/b} \sum_{i=0}^{c-1} \frac{(x/b)^i}{i!} \qquad [3.7]$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

La probabilità $Pr(X < x)$ è data dalla segente espressione:

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{e^{-x/b}}{b\Gamma(c)}$$

Integrando per parti[11] si ottiene:

$$F(x) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left[e^{-x/b} \frac{b}{c} \left(\frac{x}{b}\right)^c + \int_0^{+\infty} e^{-x/b} \frac{1}{c} \left(\frac{x}{b}\right)^c dx \right]$$

Integrando successivamente alla stessa maniera si ha:

$$F(x) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left[e^{-x/b} \frac{b}{c} \left(\frac{x}{b}\right)^c + e^{-x/b} \frac{b}{c(c+1)} \left(\frac{x}{b}\right)^{c+1} + e^{-x/b} \frac{b}{c(c+1)(c+2)} \left(\frac{x}{b}\right)^{c+2} \dots \right]$$

$$F(x) = \frac{e^{-x/b}}{\Gamma(c)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{x}{b}\right)^c + \frac{1}{c(c+1)} \left(\frac{x}{b}\right)^{c+1} + \frac{1}{c(c+1)(c+2)} \left(\frac{x}{b}\right)^{c+2} \dots \right]$$

[11] In questo caso sono stati posti:

$$\begin{cases} f' = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} & \Rightarrow \quad f = \frac{b}{c}\left(\frac{x}{b}\right)^c \\ \\ g = e^{-x/b} & \Rightarrow \quad -\frac{e^{-x/b}}{b} \end{cases}$$

Per le proprietà della funzione gamma si ottiene:

$$F(x) = e^{-x/b}\left[\sum_{i=c}^{+\infty}\frac{(x/b)^i}{i!}\right]$$

In riferimento allo sviluppo in serie di McLaurin[12] l'espressione per la funzione di ripartizione diventa la seguente:

$$F(x) = e^{-x/b}\left[e^{x/b} - \sum_{i=0}^{c-1}\frac{(x/b)^i}{i!}\right]$$
$$F(x) = 1 - e^{-x/b}\sum_{i=0}^{c-1}\frac{(x/b)^i}{i!}$$

3.3 Variabile casuale esponenziale

La variabile casuale esponenziale spesso è utilizzata per descrivere il tempo di attesa che si verifichi un dato evento. La sua funzione di densità è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad [3.8]$$

dove $\theta \in \mathbb{R}^+$. Per $x \geq 0$ deve risultare:

$$\int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx = 1$$

Dimostrazione:

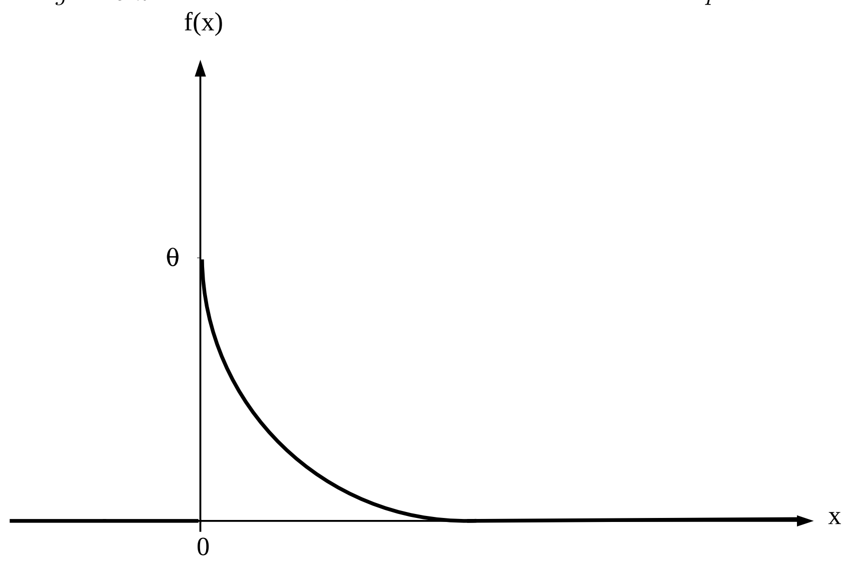
$$\int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx = \left|1 - e^{-\theta x}\right|_0^{+\infty}$$
$$\int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx = 1 - e^{-\infty} - 1 + e^0$$
$$\int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx = 1$$

La variabile casuale esponenziale presenta una discontinuità in corrispondenza del punto $x = 0$, infatti risulta[13]:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$$

[12] Si veda in proposito la nota 8 di pag. 16.
[13] Si veda la Figura 3.2.

Figura 3.2 – Funzione di densità della variabile casuale esponenziale



Il parametro θ rappresenta il valore massimo assunto dalla funzione di densità in corrispondenza di $x = 0$ che rappresenta la moda della distribuzione. La mediana risulta dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{X_{0.5}} \theta e^{-\theta x} = 0.5 \\
&\left| 1 - e^{-\theta x} \right|_0^{X_{0.5}} = 0.5 \\
&1 - e^{-\theta X_{0.5}} - 1 + e^0 = 0.5 \\
&e^{-\theta X_{0.5}} = 0.5 \\
&-\theta X_{0.5} = \ln 0.5
\end{aligned}$$

Dato che $-\ln 0.5 = \ln 2$, risulta:

$$X_{0.5} = \frac{1}{\theta} \ln 2$$

I momenti della variabile casuale esponenziale sono:

1. $E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \theta e^{-\theta x} dx$

   Integrando per parti[14] si ottiene:

[14] In questo caso sono state poste:

$$\begin{cases} f' = e^{-\theta x} & \Rightarrow \; f = -\dfrac{1}{\theta} e^{-\theta x} \\ g = \theta x & \Rightarrow \; g' = \theta \end{cases}$$

$$E(X) = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta x} \cdot \theta x - \int_0^{+\infty} \theta \left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right] dx$$
$$E(X) = -xe^{-\theta x} + \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx$$
$$E(X) = \left| -xe^{-\theta x} - \frac{1}{\theta}e^{-\theta x} \right|_0^{+\infty}$$
$$E(X) = \left| -e^{-\theta x} - \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \right|_0^{+\infty}$$
$$E(X) = \frac{1}{\theta}$$

2. $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$Var(X) = \left[\int_0^{+\infty} x^2 \cdot \theta e^{-\theta x} dx\right] - \frac{1}{\theta^2}$$

Integrando per parti[15]:

$$Var(X) = \left[-\theta x^2 \frac{1}{\theta}e^{-\theta x} - \int_0^{+\infty} 2\theta x \left(-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right) dx\right] - \frac{1}{\theta^2}$$
$$Var(X) = \left[-x^2 e^{-\theta x} + \frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty} x\theta e^{-\theta x} dx\right] - \frac{1}{\theta^2}$$

Dato che il termine sotto integrale è il valore atteso della variabile casuale esponenziale, si ha:

$$Var(X) = \left| -x^2 e^{-\theta x} \right|_0^{+\infty} + \frac{2}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}$$
$$Var(X) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2}$$
$$Var(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

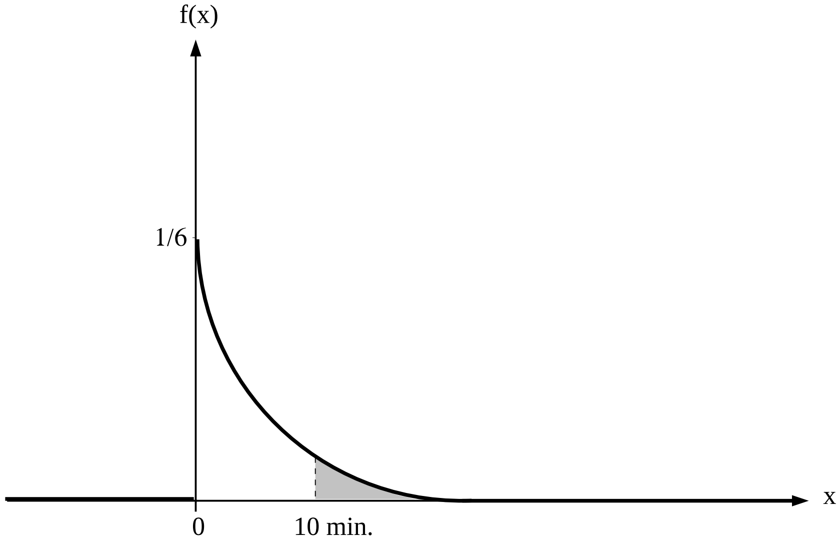
La variabile casuale esponenziale rappresenta un caso particolare della variabile casuale gamma con parametro di scala $c = 1$; tutte le proprietà della variabile casuale gamma sono perciò valide in questo caso.

Esempio 3.1 *Il tempo per effettuare un'operazione presso uno sportello bancario è una variabile casuale esponenziale con valore atteso pari a 6 minuti. Calcolare:*

[15] Dove sono stati posti:

$$\begin{cases} f' = e^{-\theta x} & \Rightarrow\ f = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta x} \\ g = \theta x^2 & \Rightarrow\ g' = 2\theta x \end{cases}$$

1. *La probabilità che il cliente attenda più di 10 minuti.*
2. *La probabilità che il cliente attenda 10 minuti sapendo che già aspetta da 4 minuti.*



Ponendo X *=tempo d'attesa e, sapendo che* $E(X) = 6$*, risulta:*

$$\theta = \frac{1}{6}$$

1. *Probabilità di un'attesa superiore ai 10 minuti:*

$$Pr(X > 10) = 1 - Pr(X < 10)$$
$$Pr(X > 10) = 1 - \int_0^{10} \frac{1}{6} e^{-x/6} dx$$
$$Pr(X > 10) = 1 - \left| 1 - e^{-x/6} \right|_0^{10}$$
$$Pr(X > 10) = 1 - 1 + e^{-5/3}$$
$$Pr(X > 10) = 0.144$$

2. *Probabilità condizionata: il cliente aspetta 10 minuti sapendo che già attende da 4.*

$$Pr(X > 10|X > 4) = \frac{Pr(X > 10) \cap Pr(X > 4)}{Pr(X > 4)}$$
$$Pr(X > 10|X > 4) = \frac{Pr(X > 10)}{Pr(X > 4)}$$
$$Pr(X > 10|X > 4) = \frac{e^{-5/3}}{e^{-2/3}}$$
$$Pr(X > 10|X > 4) = e^{-1}$$
$$Pr(X > 10|X > 4) = 0.31$$

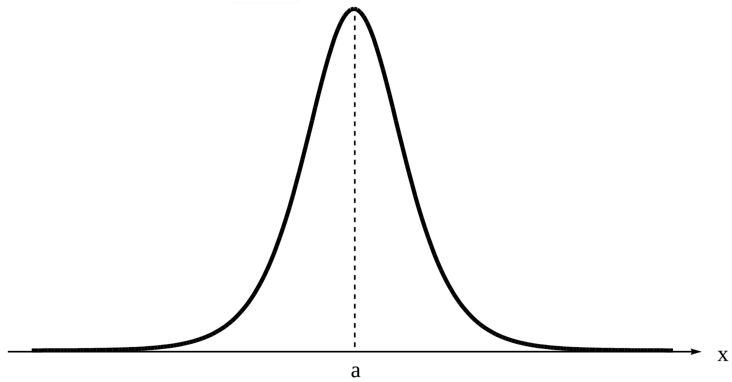
3.4 Variabile casuale logistica

La variabile casuale logistica è definita per $x \in (-\infty, +\infty)$ ed ha la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-a}{b}}}{b\left(1+e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^2} \qquad [3.9]$$

dove $a \in (-\infty, +\infty)$ è il parametro di spostamento e $b > 0$ è il parametro di scala.

Figura 3.3 – Funzione di densità della variabile casuale logistica



La condizione fondamentale è verificata in quanto vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad [3.10]$$

Dimostrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x-a}{b}}}{b\left(1+e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^2}dx$$

Ponendo $y = \dfrac{x-a}{b}$, si ha $dx = b \cdot dy$ quindi risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left|\frac{1}{1+e^{-y}}\right|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

PROPRIETÁ DELLA V.C. LOGISTICA:

- La funzione di densità della variabile casuale logistica è simmetrica rispetto all'asse $x = a$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Traslando la funzione [3.9] attraverso la sostituzione $y = x - a$ si ottiene la seguente funzione di densità per la variabile casuale logistica per la quale per la quale vale $a = 0$:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y/b}}{b\left(1+e^{-y/b}\right)^2} dy$$

Questa funzione risulta essere pari in quanto risulta;

$$\begin{aligned}
&f(y) = f(-y)\\
&\frac{e^{-y/b}}{b\left(1+e^{-y/b}\right)^2} = \frac{e^{y/b}}{b\left(1+e^{y/b}\right)^2}\\
&e^{-y/b} b\left(1+e^{y/b}\right)^2 = e^{y/b} b\left(1+e^{-y/b}\right)^2\\
&e^{-y/b}\left(1+2e^{y/b}+e^{2y/b}\right) = e^{y/b}\left(1+2e^{-y/b}+e^{-2y/b}\right)\\
&e^{-y/b}+2+e^{y/b} = e^{y/b}+2+e^{-y/b}
\end{aligned}$$

- Dalla precedente proprietà deriva che:

$$\text{moda} = X_{0.5} = E(X) = a \qquad [3.11]$$

- Quando $b = 1$ la funzione di densità della variabile casuale logistica può essere espressa dalla relazione:

$$f(x) = F(x)[1 - F(x)] \qquad [3.12]$$

dove $F(x) = \dfrac{1}{(1+e^{x-a})}$ è la funzione di ripartizione.

I momenti di questa distribuzione sono:

1. $E(X) = a$
2. $Var(X) = \dfrac{b^2\pi^2}{3}$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Data la complessità degli integrali che si ottengono applicando la definizione standard di momento, questa dimostrazione è effettuata attraverso l'utilizzo della f.g.m.

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx-\frac{x-a}{b}}}{b\left(1+e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^2} dx$$

Ponendo $y = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{x-a}{b}}}$, si ottiene:

- $1+e^{-\frac{x-a}{b}} = \dfrac{1}{y}$

- $-\frac{x-a}{b} = \frac{1-y}{y}$
- $x = a - b\ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$
- $dx = -b \cdot \frac{y}{1-y} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{b}{y(1-y)} dy$
- se $x \to -\infty \Rightarrow y \to 0$
- se $x \to +\infty \Rightarrow y \to 1$

Sostituendo all'interno della f.g.m. si ha:

$$
\begin{aligned}
G(t) &= \int_0^1 e^{at - bt\ln\left(\frac{1-y}{y}\right)} \frac{1-y}{y} \cdot \frac{y^2}{b} \cdot \frac{b}{y(1-y)} dy \\
G(t) &= \int_0^1 e^{at} \cdot \left(\frac{1-y}{y}\right)^{-bt} dy \\
G(t) &= e^{at} \int_0^1 y^{bt}(1-y)^{-bt} dy \\
G(t) &= e^{at} B(1+bt, 1-bt)
\end{aligned}
$$

dove $B(1+bt, 1-bt)$ rappresenta la funzione Beta. Per le proprietà di tale funzione la f.g.m. della variabile casuale logistica risulta essere:

$$G(t) = e^{at} \frac{\Gamma(1+bt)\Gamma(1-bt)}{\Gamma(2)}$$

Dato che $\Gamma(2) = 1$ si ha:

$$G(t) = e^{at}\Gamma(1+bt)\Gamma(1-bt)$$

Per il calcolo dei momenti occorre calcolare la derivata rispetto a t.

$$G'(t) = ae^{at}\Gamma(1+bt)\Gamma(1-bt) + be^{at}[\Gamma'(1+bt)\Gamma(1-bt) - \Gamma(1+bt)\Gamma'(1-bt)]$$

dove con Γ' si indica la derivata prima della funzione Gamma rispetto al proprio argomento. Valutando in $t = 0$ si ottiene:

$$G'(0) = a\Gamma(1)\Gamma(1) + 2b\Gamma'(1)\Gamma(1)$$

Per le proprietà della funzione digamma[16] risulta $\Gamma'(1) = 0$, quindi il valore atteso della variabile casuale logistica risulta essere:

$$E(X) = G'(0) = a$$

Per il calcolo della varianza occorre derivare due volte la funzione $G(t)$.

$$
\begin{aligned}
G''(t) &= a^2e^{at}\Gamma(1+bt)\Gamma(1-bt) + 2abe^{at}[\Gamma'(1+bt)\Gamma(1-bt) - \Gamma(1+bt)\Gamma'(1-bt)] + \\
&+ b^2e^{at}[\Gamma''(1+bt)\Gamma(1-bt) - 2\Gamma'(1+bt)\Gamma'(1-bt) + \Gamma(1+bt)\Gamma''(1-bt)]
\end{aligned}
$$

dove con Γ'' si indica la derivata seconda della funzione Gamma rispetto al proprio argomento. Valutando in $t = 0$ si ottiene:

$$G''(0) = a^2\Gamma(1)\Gamma(1) + 2ab[\Gamma'(1)\Gamma(1) - \Gamma(1)\Gamma'(1)] + b^2[\Gamma''(1)\Gamma(1) - 2\Gamma'(1)\Gamma'(1) + \Gamma(1)\Gamma''(1)]$$

Poiché per le proprietà della trigamma vale $\Gamma''(1) = \pi^2/6$, il momento secondo della variabile casuale logistica è il seguente:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= G''(0) \\
E(X^2) &= a^2 + b^2 \cdot 2\Gamma''(1)\Gamma(1) \\
E(X^2) &= a^2 + \frac{b^2\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

[16] Si veda in proposito l'Appendice.

La varianza della variabile casuale logistica sarà perciò:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$Var(X) = a^2 + \frac{b^2\pi^2}{3} - a^2$$
$$Var(X) = \frac{b^2\pi^2}{3}$$

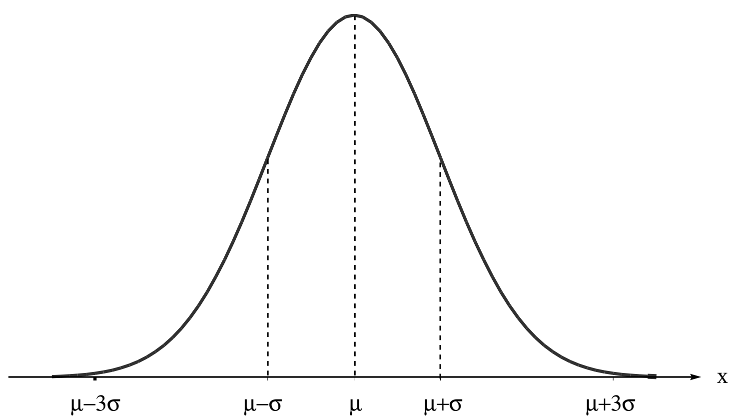
3.5 Variabile casuale normale

La variabile casuale normale o Gaussiana è una variabile casuale continua definita in tutto l'asse dei numeri reali; la sua funzione di densità è la seguente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \qquad [3.13]$$

dove $x, \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. L'andamento grafico di questa funzione, nota anche come "campana di Gauss", è evidenziato in Figura 3.4.

Figura 3.4 – Funzione di densità della variabile casuale normale



Affinché la [3.13] sia effettivamente una funzione di densità deve risultare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad [3.14]$$

Dimostrazione:

Per la dimostrazione di questa proprietà innanzi tutto occorre effettuare il seguente cambio di variabile:

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

La funzione integranda all'interno dell'integrale di cui alla [3.14] diventa perciò la funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata[17]:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy$$

dove $dy = \sigma dx$. Poiché deve risultare $A = 1$, deve valere anche $A^2 = 1$ che scaturisce dalla soluzione del seguente integrale definito doppio:

$$A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2 + z^2}{2}\right\} dydz$$

Esprimendo le variabili y e z in termini delle loro coordinate polari[18] si ottiene:

$$\begin{cases} y = \rho \cos\theta \\ z = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Sostituendo le coordinate polari all'interno dell'integrale doppio, si ottiene[19]:

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \exp\left\{-\frac{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}{2}\right\} \rho \; d\rho d\theta$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\right\} d\rho d\theta$$

dove ρ è il determinante della matrice Jacobiana[20]. Risolvendo la (3.15) si ottiene:

$$A^2 = \int_{0}^{+\infty} \rho \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\right\} d\rho$$

$$A^2 = \left| -\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\right\}\right|_{0}^{+\infty}$$

[17] Si veda l'equazione [3.16].

[18] Coordinate polari: nello spazio $\mathbf{R}^2$ generato dal piano yz ad eccezione del punto $O(0,0)$ un qualsiasi punto dato dalla coppia di valori (y,z) può essere espresso in termini di coordinate che tengono conto sia della sua distanza euclidea ρ dall'origine, sia dall'angolo di rotazione θ degli assi cartesiani.

[19] Sia $T : \Omega \to \mathbf{R}^n$ un'insieme di funzioni continue e differenziabili in Ω. Si consideri la matrice Jacobiana:

$$J(x) = \frac{\partial t_i(x)}{\partial x_j}$$

Se per $\forall\, x$ vale la condizione sul determinante $|J(x)| \neq 0$, per una funzione f non negativa risulta:

$$\int_{\Phi} f(y)dy = \int_{\Omega} f[T(x)]|J(x)|dx$$

dove $\Phi = T(\Omega)$.

[20] In riferimento alla nota precedente, T è data dalla definizione delle coordinate polari e f dall'integrale doppio, mentre risultano $x = [\;\rho \quad \theta\;]'$ e $y = [\;y \quad z\;]'$. La matrice Jacobiana sarà perciò:

$$J(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

Il suo determinante risulta perciò essere:

$$|J(\rho,\theta)| = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

$$A^2 = 1$$

Dalla [3.13] si evince che la distribuzione di X è completamente caratterizzata dai due parametri μ e σ e per questa ragione essa è spesso indicata nel seguente modo:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad [3.15]$$

dove il simbolo "$\sim$" si legge «si distribuisce come».
I momenti della variabile casuale normale sono:

1. $E(X) = \mu$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx$$

Standardizzando la variabile casuale si ha $x = \sigma z + \mu$ e $dx = \sigma dz$ quindi risulta:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz$$
$$E(X) = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz$$

L'integrale presente nel secondo addendo ha valore unitario poiché è quello calcolato sulla funzione di densità di una variabile casuale normale standardizzata. L'integrale al primo addendo ha invece soluzione immediata, quindi risulta:

$$E(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left| -2\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \right|_{-\infty}^{+\infty} + \mu$$

Dato che l'integrale definito ha valore nullo[21] il valore atteso della variabile casuale normale è perciò il seguente:

---

[21] Tale soluzione può essere ottenuta in modo più immediato semplicemente applicando il seguente teorema.

Teorema

Date le seguenti ipotesi:

- $f(x)$ *è una funzione dispari cioè risulta* $f(x) = -f(-x)$
- *gli estremi di integrazione sono opposti*

Risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$$

In questo caso $f(z) = z\exp\{-z^2/2\}$ e gli estremi di integrazione rispettano le ipotesi del teorema.

$$E(X) = \mu$$

---

2. $Var(X) = \sigma^2$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Per il calcolo della varianza occorre innanzi tutto determinare il valore del momento secondo dato dalla seguente espressione:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx$$

Ponendo $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\ E(X^2) &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + 2\sigma\mu\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \\ &+ \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \end{aligned}$$

L'integrale al secondo addendo è nullo, mentre l'integrale nel terzo addendo vale 1 perché sono dati rispettivamente dall'equazione del valore atteso e dalla condizione fondamentale sulla funzione di densità della variabile casuale con media nulla e varianza unitaria[22]. L'equazione del momento secondo di X diviene perciò:

$$E(X^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} z^2 \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} z^2 \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \mu^2$$

L'integrale è stato spezzato in due integrali equivalenti in quanto la funzione integranda è una funzione pari. Effettuando il cambio di variabile $y = z^2/2$ si ottiene per entrambe le partizioni la funzione monotòna $z = \sqrt{2y}$, quindi $dz = (2y)^{-1/2}$. Sostituendo si ha:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} z^2 \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz + \mu^2 \\ E(X^2) &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} 2ye^{-y}(2y)^{-1/2} dy + \mu^2 \\ E(X^2) &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} y^{1/2} e^{-y} dy + \mu^2 \end{aligned}$$

L'integrale corrisponde alla funzione $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, quindi si ha[23]:

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

La varianza della variabile casuale normale sarà perciò:

---

[22] cfr. variabile casuale normale standardizzata (equazione [3.16]).

[23] Per la definizione ed alcune proprietà della funzione gamma $\Gamma(c)$ si veda l'Appendice.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$Var(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$
$$Var(X) = \sigma^2$$

PROPRIETÀ DELLA V.C. NORMALE

1. La sua funzione di densità (Figura 3.4) è simmetrica[24] rispetto alla retta $x = \mu$. Per la variabile casuale normale l'indice di asimmetria è sempre nullo, quindi risulta:
$$\gamma_3 = 0$$
In corrispondenza del punto $x = \mu$ si ha un punto di massimo assoluto della funzione di densità. Dato che tale punto è anche centro di simmetria e valore medio, è sempre verificata la seguente uguaglianza:
$$\text{moda} = X_{0.5} = \mu$$

2. L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale della funzione di densità in quanto risulta:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

3. In corrispondenza dei punti $x_1 = \mu - \sigma$ e $x_2 = \mu + \sigma$ la funzione di densità della variabile casuale normale mostra due punti di flesso, quindi la curva cambia concavità.

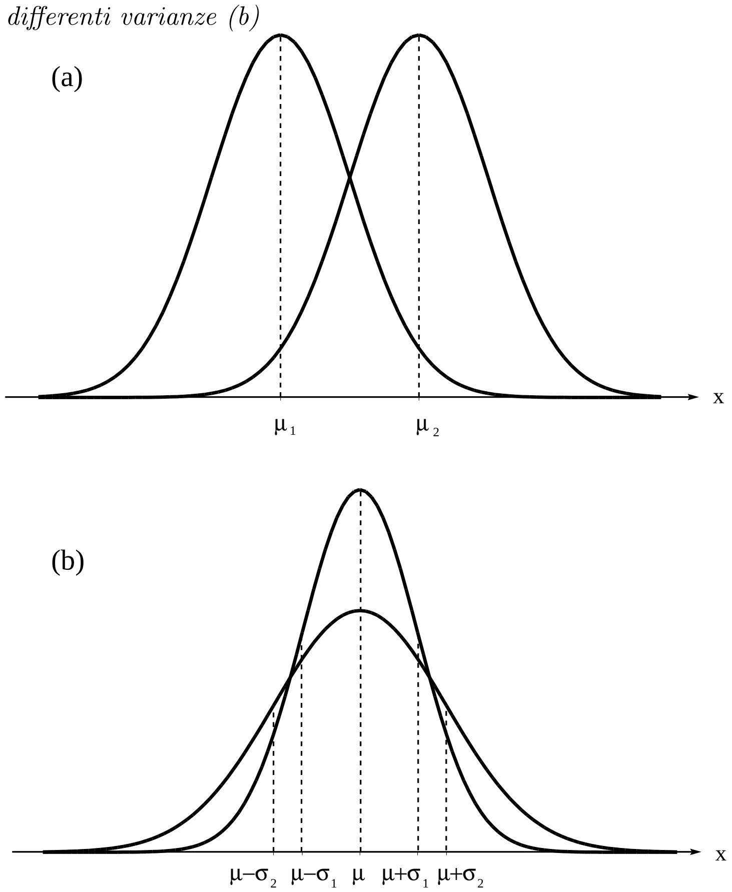
4. Quasi tutta la probabilità è contenuta all'interno dell'intervallo chiuso $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, infatti risulta:
$$Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.99$$

5. La variabile casuale normale funge da riferimento per il valore della curtosi poiché essa è una distribuzione mesocurtica e, per qualsiasi valore di μ e σ, vale sempre:
$$\gamma_4 = 3$$
Per le distribuzioni platicurtiche risulta $Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 1$, cioè tutta la probabilità è contenuta all'interno dell'intervallo. Per le distribuzioni leptocurtiche la probabilità contenuta all'interno dello stesso intervallo è minore di quella che sarebbe contenuta dalla variabile casuale normale, quindi risulta $Pr(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) < 0.99$.

[24] Se $\mu = 0$ la funzione di densità della variabile casuale normale è una funzione pari, cioè simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Il valore medio della variabile casuale normale determina la posizione della funzione di densità nel grafico. Date due variabili casuali normali con la stessa funzione di densità a meno del parametro relativo alla media, se $\mu_1 < \mu_2$, il grafico che si ottiene è quello della Figura 3.5 (a).
La varianza della variabile casuale normale determina la forma della funzione di densità nel grafico: la Figura 3.5 (b) mostra invece due variabili casuali normali con la stessa funzione di densità a meno del parametro relativo alla varianza con $\sigma_1 < \sigma_2$. A seconda del valore dei parametri μ e σ si può quindi determinare un numero infinito di variabili casuali normali.

Figura 3.5 – Funzione di densità di variabili casuali normali con differenti medie (a) e con differenti varianze (b)



Per calcolare il valore della probabilità si ricorre all'utilizzo delle tavole[25] della variabile casuale normale standardizzata (Z) che ha la seguente

[25]Le tavole della distribuzione normale standardizzata sono contenute a pag. 77.

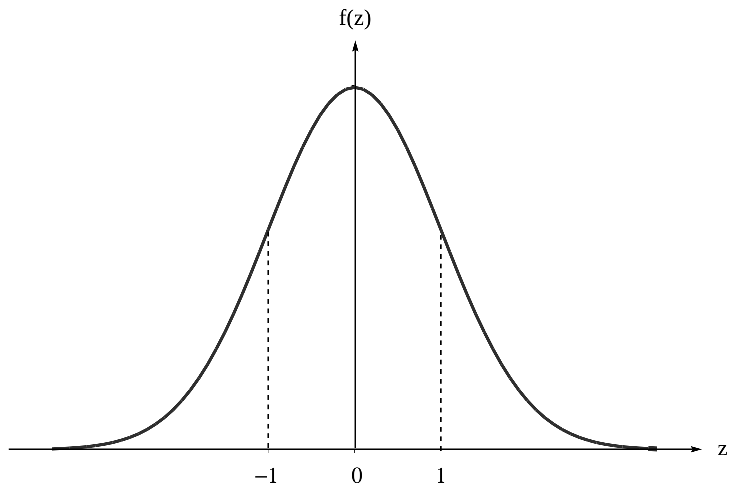
espressione analitica per la funzione di densità:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\} \qquad [3.16]$$

La variabile casuale normale standardizzata gode di tutte le proprietà della variabile casuale normale ed in più essa ha media nulla e varianza unitaria. Tale variabile casuale è così definita:

$$Z \sim N(0, 1) \qquad [3.17]$$

Figura 3.6 – Funzione di densità della variabile casuale normale standardizzata



Per ottenere la [3.16] basta applicare la formula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad [3.18]$$

Questa formula trasforma una qualsiasi variabile casuale normale nella forma standardizzata senza determinare perdite di proprietà[26]. Ovviamente l'area inclusa al di sotto della curva e al di sopra dell'asse delle ascisse ha valore unitario[27], poiché deve risultare:

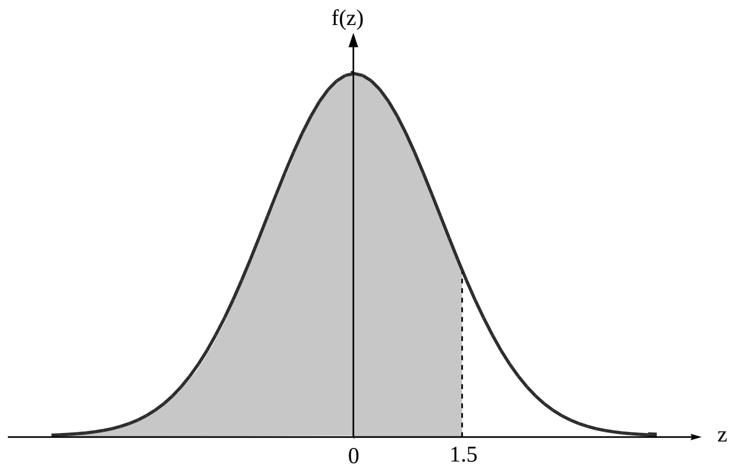
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1 \qquad [3.19]$$

[26] Standardizzare una variabile casuale binomiale o Poissoniana ad esempio genera perdita di proprietà: tali variabili non sono definite per valori negativi, quindi la loro forma standardizzata non ha alcun senso.

[27] La dimostrazione di questa proprietà è molto complessa e bisogna ricorrere alle coordinate polari poiché in quelle cartesiane non esiste una funzione la cui derivata è pari alla [3.16].

Dato che esistono le tavole della variabile casuale normale standardizzata è facilmente ottenibile il valore dell'area sottesa dalla sua funzione di densità all'interno di qualsiasi intervallo appartenente al suo dominio.

Esempio 3.2 *Calcolare la probabilità $Pr(Z < 1.5)$.*



Il calcolo della probabilità equivale a quello dell'area colorata del grafico che corrisponde a quei valori della variabile casuale tali che $Z < 1.5$. Analiticamente risulta:

$$Pr(Z < 1.5) = \int_{-\infty}^{1.5} f(z)dz$$

$$Pr(Z < 1.5) = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{1.5} f(z)dz$$

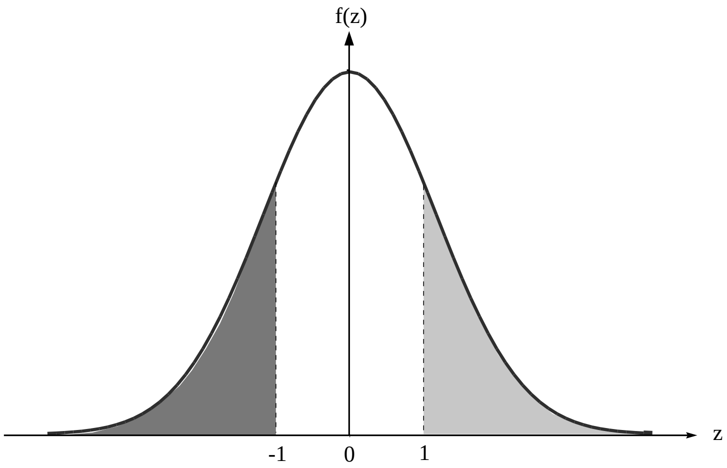
$$Pr(Z < 1.5) = 0.5 + 0.4332$$

$$Pr(Z < 1.5) = 0.9332$$

Esempio 3.3 *Calcolare la probabilità $Pr(Z < -1)$.*

Dato che la curva della variabile casuale normale standardizzata è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, calcolare $Pr(Z < -1)$ equivale alla determinazione dell'area che indica $Pr(Z > 1)$.
Analiticamente ciò si traduce nella seguente espressione:

$$Pr(Z < -1) = \int_{-\infty}^{-1} f(z)dz = \int_{1}^{+\infty} f(z)dz$$



Calcolo della probabilità:

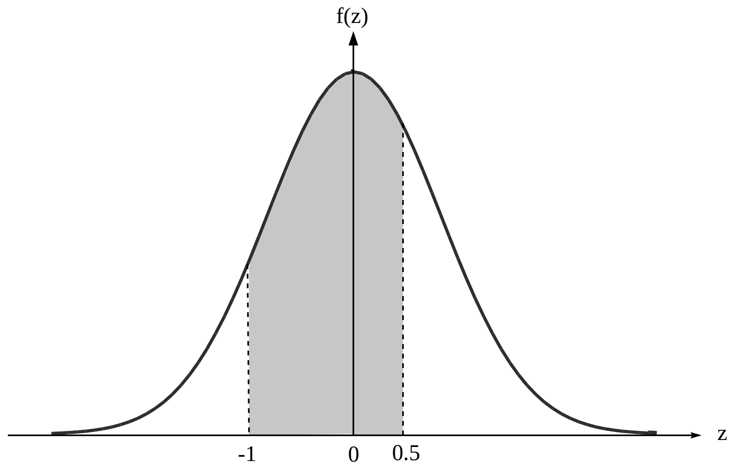
$$Pr(Z < -1) = \int_{1}^{+\infty} f(z)dz$$
$$Pr(Z < -1) = \int_{0}^{+\infty} f(z)dz - \int_{0}^{1} f(z)dz$$
$$Pr(Z < -1) = 0.5 - 0.3413$$
$$Pr(Z < -1) = 0.1587$$

Esempio 3.4 *Data la variabile casuale $X \sim N(3,4)$, calcolare $Pr(1 \leq X \leq 4)$.*

Innanzi tutto occorre ricondurre la funzione di densità della variabile casuale normale alla sua forma standardizzata:

$$Pr(1 \leq X \leq 4) = Pr\left(\frac{1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right)$$
$$Pr(1 \leq X \leq 4) = Pr\left(\frac{1-3}{2} \leq Z \leq \frac{4-3}{2}\right)$$
$$Pr(1 \leq X \leq 4) = Pr(-1 \leq Z \leq 0.5)$$

I due valori di probabilità si eguagliano quindi si possono utilizzare le tavole della variabile casuale normale standardizzata.
La probabilità $Pr(1 \leq X \leq 4)$ equivale all'area colorata tracciata nel grafico.



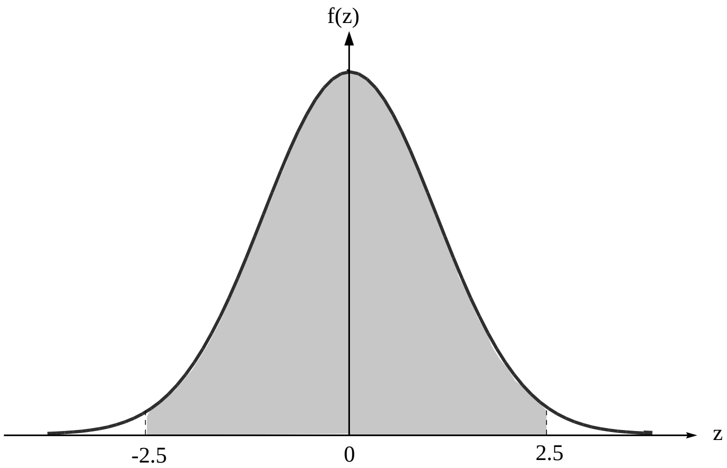
$$Pr\,(-1 \leq Z \leq 0.5) = \int_{-1}^{0.5} f(z)dz$$
$$Pr\,(-1 \leq Z \leq 0.5) = \int_{-1}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{0.5} f(z)dz$$
$$Pr\,(-1 \leq Z \leq 0.5) = \int_{0}^{0.5} f(z)dz + \int_{0}^{1} f(z)dz$$
$$Pr\,(-1 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915 + 0.3413$$
$$Pr\,(-1 \leq Z \leq 0.5) = 0.5328$$

Esempio 3.5 *Una macchina produce sfere d'acciaio con diametro che segue una distribuzione normale del tipo $X \sim N(2500\ micron, 400\ micron)$. I limiti di tolleranza di tali sfere vanno da 2450 micron a 2550 micron.*
Qual è la probabilità che ogni sfera non esca dai limiti di tolleranza?

La probabilità è data da:

$$Pr(2450 < X < 2550) = Pr\left(\frac{2450-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2550-\mu}{\sigma}\right)$$
$$Pr(2450 < X < 2550) = Pr\left(\frac{2450-2500}{20} < Z < \frac{2550-2500}{20}\right)$$
$$Pr(2450 < X < 2550) = Pr(-2.5 < Z < 2.5)$$

La probabilità $Pr(-2.5 < Z < 2.5)$ equivale all'area colorata tracciata nel grafico.



$$Pr(-2.5 < Z < 2.5) = \int_{-2.5}^{2.5} f(z)dz$$
$$Pr(-2.5 < Z < 2.5) = \int_{-2.5}^{0} f(z)dz + \int_{0}^{2.5} f(z)dz$$
$$Pr(-2.5 < Z < 2.5) = 2\int_{0}^{2.5} f(z)dz$$
$$Pr(-2.5 < Z < 2.5) = 2 \cdot 0.4938$$
$$Pr(-2.5 < Z < 2.5) = 0.9876$$

3.6 Variabile casuale lognormale

Si consideri la variabile casuale X con supporto $x \in [0, +\infty)$ e la sua trasformazione $Y = \ln X$. Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ la funzione di densità della variabile casuale lognormale è data dalla seguente espressione:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} \qquad [3.20]$$

dove $\mu = E(\ln x)$ e $\sigma^2 = Var(\ln x)$ rappresentano rispettivamente il parametro di spostamento ed il parametro di scala della distribuzione.

3.7 Variabile casuale Paretiana

La variabile casuale Paretiana trova applicazione soprattutto in campo economico in quanto essa viene utilizzata nello studio dei problemi relativi all'ottima allocazione delle risorse. Come variabile casuale normale, anche questa variabile casuale è caratterizzata da due parametri:

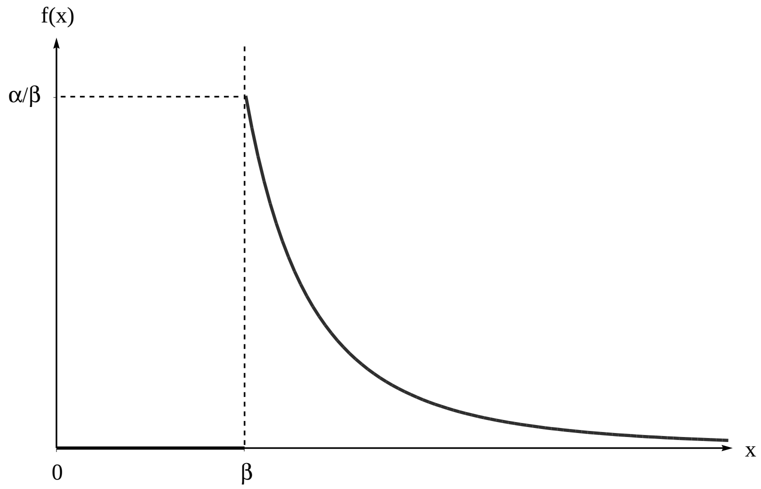
- Un parametro di scala α (*shape parameter*) che determina la forma della funzione di densità,
- Un parametro di spostamento β (*shift parameter*) che determina il valore minimo assunto dalla variabile casuale[28].

La sua funzione di densità ha la seguente espressione analitica:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{se } x \geq \beta \\ \\ 0 & \text{se } x < \beta \end{cases} \qquad [3.21]$$

dove $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Figura 3.7 – Funzione di densità della variabile casuale Paretiana



Condizione fondamentale:

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\beta}^{+\infty} \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx$$
$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = \alpha\beta^{\alpha} \int_{\beta}^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}dx$$
$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = \alpha\beta^{\alpha} \left| -\frac{1}{\alpha}x^{-\alpha} \right|_{\beta}^{+\infty}$$

[28] Ad esempio β potrebbe rappresentare il livello minimo di reddito per un consumatore.

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = -\beta^{\alpha} \left| \frac{1}{x^{\alpha}} \right|_{\beta}^{+\infty}$$
$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = -\beta^{\alpha} \left(0 - \frac{1}{\beta^{\alpha}} \right) = 1$$

$$\int_{\beta}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Anche la variabile casuale Paretiana, come l'esponenziale, presenta un punto di discontinuità in corrispondenza di $x = \beta$; tale punto costituisce il valore modale della distribuzione poiché la funzione di densità assume valore massimo.
La mediana della variabile casuale Paretiana si ottiene dal seguente integrale:

$$\int_{\beta}^{X_{0.5}} f(x)dx = 0.5$$

Risolvendo per $X_{0.5}$:

$$-\beta^{\alpha} \left| \frac{1}{x^{\alpha}} \right|_{\beta}^{X_{0.5}} = 0.5$$
$$-\beta^{\alpha} \left(\frac{1}{X_{0.5}^{\alpha}} - \frac{1}{\beta^{\alpha}} \right) = 0.5$$
$$\left(\frac{\beta}{X_{0.5}} \right)^{\alpha} = 0.5$$
$$X_{0.5} = 2^{1/\alpha}\beta$$

I momenti della variabile casuale Paretiana sono:

1. $E(X) = \int_{\beta}^{+\infty} x \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx$

   $E(X) = \alpha\beta^{\alpha} \int_{\beta}^{+\infty} x^{-\alpha} dx$

   $E(X) = \alpha\beta^{\alpha} \left| \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{\beta}^{+\infty}$

   $E(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{1-\alpha} \left| \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right|_{\beta}^{+\infty}$

   $E(X) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{1-\alpha} \left(0 - \frac{1}{\beta^{\alpha-1}} \right)$

   $E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}$

   dove $\alpha > 1$ affinché risulti $E(X) > 0$.

2. $Var(X) = \int_{\beta}^{+\infty} \left(x - \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\right)^2 \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx$

$$Var(X) = \int_{\beta}^{+\infty} \left(x^2 - 2\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}x + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-1)^2}\right) \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$Var(X) = \alpha\beta^{\alpha}\left[\int_{\beta}^{+\infty} x^{1-\alpha}dx - 2\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\int_{\beta}^{+\infty} x^{-\alpha}dx + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-1)^2}\int_{\beta}^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}dx\right]$$

$$Var(X) = \alpha\beta^{\alpha}\left[\left|\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_{\beta}^{+\infty} - 2\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}\left|\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\beta}^{+\infty} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-1)^2}\left|-\frac{1}{\alpha}x^{-\alpha}\right|_{\beta}^{+\infty}\right]$$

$$Var(X) = \alpha\beta^{\alpha}\left[\frac{1}{2-\alpha}\left|\frac{1}{x^{\alpha-2}}\right|_{\beta}^{+\infty} + 2\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)^2}\left|\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right|_{\beta}^{+\infty} - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha(\alpha-1)^2}\left|\frac{1}{x^{\alpha}}\right|_{\beta}^{+\infty}\right]$$

$$Var(X) = \alpha\beta^{\alpha}\left[\frac{\beta^2}{(\alpha-2)\beta^{\alpha}} + 2\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2\beta^{\alpha}} - \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha(\alpha-1)^2\beta^{\alpha}}\right]$$

$$Var(X) = \alpha\beta^2\frac{(\alpha-1)^2 - \alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

dove $\alpha > 2$ affinché il valore della varianza sia positivo.

3.8 Variabile casuale uniforme

La variabile casuale uniforme o rettangolare è una variabile casuale continua con funzione di densità così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad [3.22]$$

La variabile casuale uniforme ha una funzione di densità simmetrica con centro di simmetria in $x = (a+b)/2$, punto medio dell'intervallo chiuso $[a, b]$.

Dato che la funzione di densità è nulla per valori esterni all'intervallo $[a, b]$, deve risultare:

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1$$

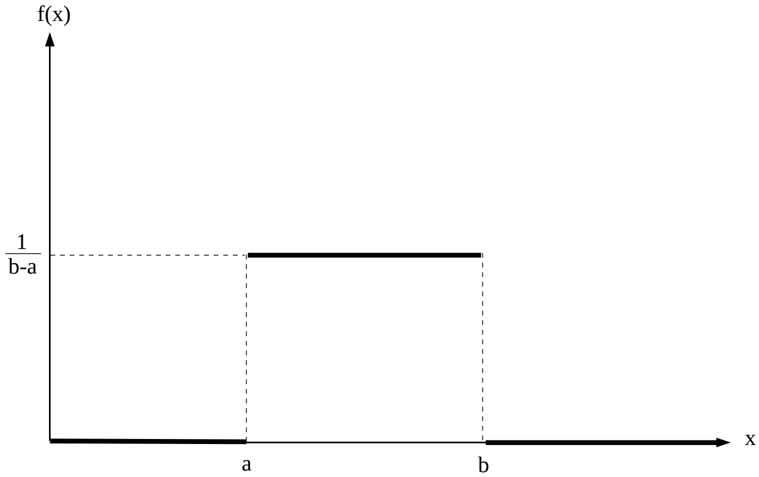
Dimostrazione:

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}|x|_a^b$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$$

Figura 3.8 – Funzione di densità della variabile casuale uniforme



I momenti della variabile casuale uniforme sono:

1. $E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$

   $E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$

   $E(X) = \frac{1}{b-a} \left| \frac{x^2}{2} \right|_a^b$

   $E(X) = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}$

   $E(X) = \frac{a+b}{2}$

2. $Var(X) = \int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2} \right]^2 \frac{1}{b-a} dx$

   $Var(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[x^2 - (a+b)x + \frac{(a+b)^2}{4} \right] dx$

   $Var(X) = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^b x^2 dx - (a+b) \int_a^b x dx + \frac{(a+b)^2}{4} \int_a^b dx \right]$

   $Var(X) = \frac{1}{b-a} \left[\left| \frac{x^3}{3} \right|_a^b - (a+b) \left| \frac{x^2}{2} \right|_a^b + \frac{(a+b)^2}{4} |x|_a^b \right]$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2} + \frac{(a+b)^2(b-a)}{4}\right] \\
Var(X) &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{4(b^3-a^3) - 6(a+b)(b^2-a^2) + 3(a+b)^2(b-a)}{12}\right] \\
Var(X) &= \frac{4(a^2+b^2+ab) - 6(a+b)^2 + 3(a+b)^2}{12} \\
Var(X) &= \frac{4(a^2+b^2+ab) - 3(a+b)^2}{12} \\
Var(X) &= \frac{a^2+b^2-2ab}{12} \\
Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Il punto $x = (a+b)/2$, oltre a fungere da centro di simmetria della funzione di densità, coincide con il valore atteso e con la mediana, infatti risulta:

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{b-a} dx = 0.5$$

La variabile casuale uniforme è una distribuzione plurimodale in quanto tutti i punti compresi nell'intervallo $[a, b]$ costituiscono la moda.

Dato che la funzione di densità della variabile casuale uniforme è simmetrica si ha che $\gamma_3 = 0$. È inoltre facilmente dimostrabile che tale distribuzione è platicurtica in quanto mostra un valore di curtosi minore di 3.

4 Distribuzioni derivate dalla v.c. normale

In questo paragrafo vengono introdotte tre variabili casuali che derivano direttamente dalla distribuzione normale e che, insieme ad essa, risultano essere molto importanti nell'inferenza statistica nonché in econometria[1]: esse sono le variabili casuali continue "chi quadrato", "t di Student" e "F di Snedecor". Alcuni particolari quantili di queste distribuzioni sono contenuti nelle tavole statistiche poste nella sezione finale di questo testo.

4.1 Variabile casuale chi quadrato

Date n variabili casuali normali standardizzate indipendenti, si definisce la variabile casuale chi quadrato con n gradi di libertà[2] (χ^2_n) come la somma dei loro quadrati. Formalmente si ha:

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \qquad [4.1]$$

Dato che la somma di quadrati non può assumere valori negativi, la variabile casuale chi quadrato è definita nell'intervallo $[0, +\infty)$. La sua funzione di densità è la seguente:

$$f(\chi^2_n) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad [4.2]$$

dove $x \geq 0$ e $\Gamma(n/2)$ è la funzione gamma[3].

[1] Tali distribuzioni sono ampiamente utilizzate nell'ambito della costruzione degli intervalli di confidenza e in quello dei test statistici.

[2] D'ora in avanti sarà sempre adottata l'abbreviazione g.d.l.

[3] La funzione gamma è così definita:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Essa gode della proprietà $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Poiché $\Gamma(1) = 1$, per valori interi di n si ha $\Gamma(n) = (n-1)!$

I momenti della variabile casuale chi quadrato sono:

1. $E(\chi^2_n) = \int_0^{+\infty} x \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dx$

   $E(\chi^2_n) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dx$

   $E(\chi^2_n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$

   Ponendo $t = \frac{x}{2}$ si ottiene $dx = 2dt$, quindi si ha:

   $E(\chi^2_n) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt$

   $E(\chi^2_n) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}+1-1} e^{-t} dt$

   Per le proprietà della funzione gamma si ha perciò:

   $E(\chi^2_n) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$

   $E(\chi^2_n) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

   $E(\chi^2_n) = n$

2. $Var(\chi^2_n) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dx - n^2$

   $Var(\chi^2_n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}} dx - n^2$

   Ponendo $t = \frac{x}{2}$ (con $dx = 2dt$) si ottiene:

   $Var(\chi^2_n) = \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2^{\frac{n}{2}+1} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}+1} e^{-t} dt - n^2$

   Dalle proprietà della funzione gamma:

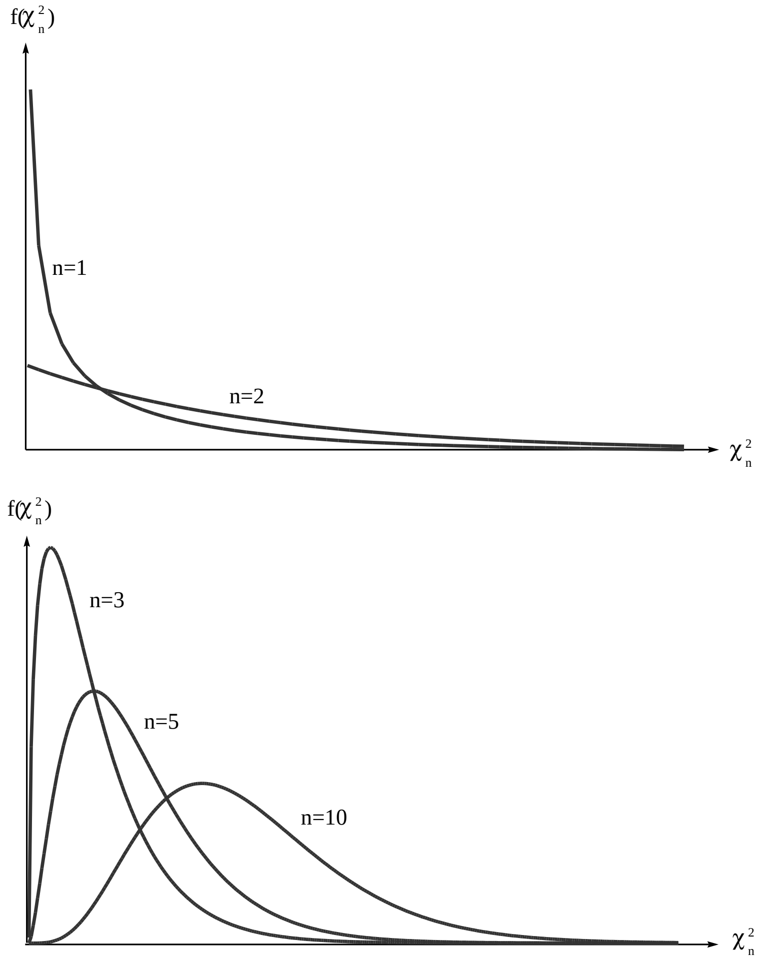
   $Var(\chi^2_n) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) - n^2$

   $Var(\chi^2_n) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1+1\right) - n^2$

$$Var(\chi^2_n) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) - n^2$$
$$Var(\chi^2_n) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) - n^2$$
$$Var(\chi^2_n) = 2n\left(\frac{n}{2}+1\right) - n^2$$
$$Var(\chi^2_n) = 2n$$

L'andamento grafico della variabile casuale chi quadrato dipende dal numero dei suoi g.d.l., infatti la sua funzione di densità assume una forma simile a quella di un'iperbole quando $n = 1$ o $n = 2$, mentre assume una forma "a campana" per $n \geq 3$ (Figura 4.1).

Figura 4.1 – Funzione di densità della variabile casuale chi quadrato



PROPORIETÀ DELLA V.C. CHI QUADRATO:

1. La funzione di densità della variabile casuale chi quadrato è asimmetrica con $\gamma_3 > 0$ per $\forall\ n$.

2. La curtosi della variabile casuale chi quadrato è pari a $\gamma_4 = 3 + 12/n$, quindi tale distribuzione è leptocurtica.

3. All'aumentare del numero dei suoi g.d.l. la funzione di densità tende ad approssimarsi a quella di una variabile casuale normale[4] con media n e varianza $2n$.

4. La variabile casuale chi quadrato gode della legge di additività, infatti, prese due distribuzioni indipendenti con differente numero di g.d.l., risulta:

$$\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Dato che per definizione risulta $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ e $\chi_m^2 = \sum_{i=1}^{m} Z_i^2$, la loro somma è:

$$\chi_n^2 + \chi_m^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 + \sum_{i=1}^{m} Z_i^2$$

$$\chi_n^2 + \chi_m^2 = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2$$

$$\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2$$

---

5. La funzione di densità della variabile casuale chi quadrato è un caso particolare di quella della variabile casuale Gamma che ha la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{e^{-\frac{x}{b}}}{b\Gamma(c)} \qquad [4.3]$$

In questo caso basta porre $b = 2$ e $c = \frac{n}{2}$.

6. Quando $n = 2$, la funzione di densità coincide con quella di una variabile casuale esponenziale con $\theta = 1/2$.

[4] Questa proprietà è un'applicazione del Teorema del limite centrale di Lindeberg-Lévy.

4.2 Variabile casuale t di Student

Considerando una variabile casuale normale standardizzata ed una variabile casuale chi quadrato con n g.d.l. tra loro indipendenti, il seguente rapporto definisce la variabile casuale t di Student con n g.d.l. (t_n):

$$t_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}} \qquad [4.4]$$

Analiticamente la sua funzione di densità deriva direttamente dalla [4.4] ed assume la seguente forma:

$$f(t_n) = K(n)\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad [4.5]$$

dove $K(n) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}$.

Dimostrazione:

Si consideri la variabile casuale t_n condizionata dall'evento $\chi_n^2 = k$:

$$t_n|k = Z\sqrt{\frac{n}{k}}$$

Poiché $Z \sim N(0,1)$ i suoi momenti sono:

- $E(t_n|k) = \sqrt{\frac{n}{k}}E(Z) = 0$
- $Var(t_n|k) = \frac{n}{k}Var(Z) = \frac{n}{k}$

In base a questo risultato la distribuzione della variabile casuale condizionata $t = t_n|k$ ha la seguente funzione di densità di una variabile casuale normale:

$$f(t_n|k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(n/k)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n/k}\right\}$$

Dato che k ha distribuzione chi quadrato con n g.d.l. la funzione di densità congiunta risulta essere:

$$f(t,k) = f(t_n|k)f(k)$$
$$f(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{k}{n}\right)^{1/2} e^{-\frac{k}{2}\ t^2/n}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\frac{e^{-\frac{k}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$
$$f(t,k) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}k^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{k}{2}(1+t^2/n)}$$

Integrando rispetto all'evento condizionante k si ottiene la distribuzione marginale di t, quindi la funzione di densità della variabile casuale t di Student.

$$f(t_n) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} k^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{k}{2}(1+t^2/n)}dk$$

Ponendo $y = \frac{k}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$, risulta $dk = 2\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1} dy$ quindi sostitutendo si ha:

$$f(t_n) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \left[2y\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1}\right]^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} 2\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1} dy$$

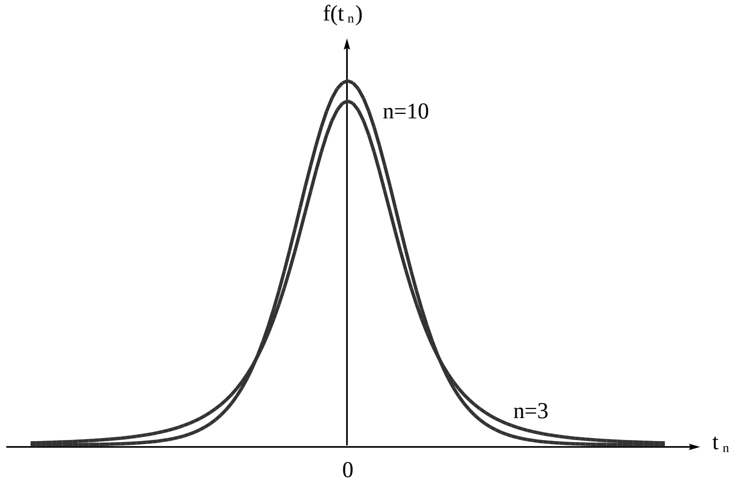
$$f(t_n) = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy$$

$$f(t_n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-y} dy$$

Poiché l'integrale restituisce la funzione $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ risulta[5]:

$$f(t_n) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Figura 4.2 – Funzione di densità della variabile casuale t di Student



Dato che il supporto della variabile casuale è rappresentato dall'asse dei numeri reali e poiché all'interno della [4.5] compare soltanto il quadrato della variabile t, si evince che tale funzione di densità è simmetrica (Figura 4.2). La condizione fondamentale è assicurata dal seguente integrale definito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

[5] Si veda in proposito l'Appendice.

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$K(n)\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt=1$$

Ponendo $y=\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1}$ si ha $t=\pm\sqrt{n}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$; dato che la trasformazione non è biunivoca per $t\in(-\infty,+\infty)$, occorre spezzare l'integrale in due parti quindi risulta:

$$K(n)\left[\int_{-\infty}^{0}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt+\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt\right]=1$$
$$2K(n)\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt=1$$

Imponendo la trasformazione con $dt=\frac{\sqrt{n}}{2}y^{-3/2}(1-y)^{-1/2}$ si ottiene:

$$2\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\sqrt{n}}{2}\int_0^1 y^{\frac{n+1}{2}}y^{-3/2}(1-y)^{-1/2}dy=1$$
$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 y^{\frac{n+2}{2}}(1-y)^{-1/2}dy=1$$

Per le proprietà della funzione beta e della funzione gamma risulta:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 y^{\frac{n}{2}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}dy=1$$
$$\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)=1$$

Momenti della variabile casuale t di Student:

1. $E(t_n)=0$
2. $Var(t_n)=\frac{n}{n-2}$

<u>*Dimostrazione:*</u>

$$Var(t_n)=K(n)\int_{-\infty}^{+\infty}t_n^2\left(1+\frac{t_n^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dt_n$$

Ponendo $y = \frac{t_n^2}{n}$ (funzione non biunivoca) risulta $dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{y}}$ quindi l'integrale diventa:

$$Var(t_n) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}ny(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{y}}dy$$

$$Var(t_n) = n\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}y^{1/2}(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}dy$$

Per le proprietà della funzione beta l'integrale restituisce $B\left(\frac{3}{2},\frac{n}{2}-1\right)$, quindi si ha:

$$Var(t_n) = n\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Per le proprietà della funzione gamma risulta:

$$Var(t_n) = n\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$Var(t_n) = \frac{n}{n-2}$$

Ovviamente, affinché la varianza assuma sempre valori positivi, deve risultare che $n > 2$.

PROPRIETÀ DELLA V.C. t DI STUDENT:

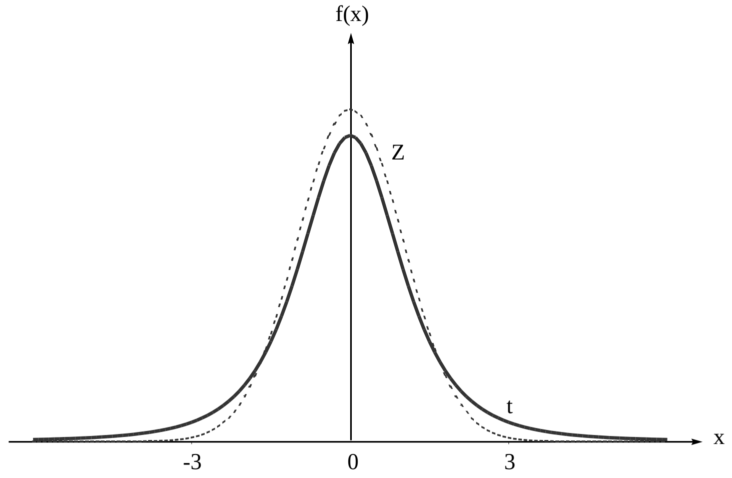
1. Come detto in precedenza la funzione di densità è simmetrica quindi il coefficiente di Fisher è sempre nullo ($\gamma_3 = 0$).

2. La distribuzione t di Student è leptocurtica, infatti la sua curtosi risulta essere $\gamma_4 > 3$. Nella Figura 4.3. la funzione di densità della t di Student è stata tracciata insieme a quella di una variabile casuale normale standardizzata (curva tratteggiata): da tale grafico si evince che le sue code contengono una massa di probabilità più alta.

3. All'aumentare dei g.d.l. la distribuzione t di Student tende a quella della variabile casuale normale standardizzata[6].

[6] Questa proprietà è dimostrata attraverso il Teorema Centrale del Limite di Linderg-Lévy. Si veda in proposito la Figura 4.2.

Figura 4.3 – Variabili casuali t di Student (t) e normale standardizzata (Z) a confronto



4.3 Variabile casuale F di Snedecor

Date due variabili casuali χ^2_n e χ^2_m indipendenti, si definisce variabile casuale F di Snedecor il seguente rapporto:

$$F_{n,m} = \frac{\frac{\chi^2_n}{n}}{\frac{\chi^2_m}{m}} \qquad [4.6]$$

Poiché nella sua definizione entra le variabile casuale chi quadrato, la F di Snedecor è definita anch'essa nell'intervallo $[0, +\infty)$. La sua funzione di densità è la seguente:

$$f(F_{n,m}) = \frac{n\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{m\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{n}{m}F\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1+\frac{n}{m}F\right)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad [4.7]$$

I momenti della variabile casuale F di Snedecor sono (senza dimostrazione):

1. $E(F_{n,m}) = \dfrac{m}{m-2}$
2. $Var(F_{n,m}) = \dfrac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$

PROPRIETÀ DELLA V.C. F DI SNEDECOR:

1. È determinata in base al valore dei parametri n ed m.

2. La funzione di densità della variabile casuale $F_{n,m}$ non coincide con quella della variabile casuale $F_{m,n}$.

3. La distribuzione è asimmetrica e leptocurtica.

4. Quando $n \to +\infty$ risulta:

$$F_{n,m} \sim \frac{\chi^2_m}{m}$$

Quando invece $m \to +\infty$ si ha:

$$F_{n,m} \sim \frac{\chi^2_n}{n}$$

5 La variabile casuale multinormale

Il vettore X costituito da n variabili casuali ha una distribuzione multinormale se risulta:

$$X \sim N(\mu, \Sigma)$$

dove μ è il vettore contenente gli n valori attesi delle variabili casuali presenti in X e Σ è la matrice $n \times n$ delle varianze e delle covarianze. La funzione di densità congiunta della variabile casuale multinormale è la seguente:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \qquad [5.1]$$

dove $|\Sigma|$ è il determinante[1] della matrice delle varianze e delle covarianze ed il vettore $(x-\mu)'$ è il vettore trasposto di $(x-\mu)$.

PROPRIETÀ DELLA VARIABILE CASUALE MULTINORMALE:

1. Il valore di n determina la dimensione del vettore X quindi della variabile casuale multinormale stessa. Ovviamente, se $n = 1$, la sua funzione di densità coincide con l'equazione [3.13] in quanto tutti i vettori e la matrice Σ diventano scalari.

2. Si consideri la variabile casuale $Y = a + B'X$, dove a è una costante, mentre B è una matrice $n \times k$. Se $X \sim N(\mu, \Sigma)$ risulta:

$$Y \sim N(a + B'\mu, B'\Sigma B) \qquad [5.2]$$

3. Si consideri il vettore X così partizionato:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right)$$

   Da tale distribuzione possono essere ottenute:

[1] Per tutte le definizioni relative agli argomenti di algebra delle matrici si rimanda all'Appendice.

(a) le distribuzioni marginali

$$\begin{aligned} X_1 &\sim N(\mu_1, \Sigma_{11}) \\ X_2 &\sim N(\mu_2, \Sigma_{22}) \end{aligned}$$

(b) le distribuzioni condizionali

$$\begin{aligned} X_1|X_2 &\sim N\left(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right) \\ X_2|X_1 &\sim N\left(\mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X_1 - \mu_1), \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right) \end{aligned}$$

4. Quando il vettore dei valori attesi è composto da tutti elementi nulli e la matrice delle varianze e delle covarianze coincide con la matrice identità, si ottiene la variabile casuale multinormale standardizzata Z. Per $\mu = 0$ e $\Sigma = I_n$ la funzione di densità congiunta diventa perciò la seguente:

$$f(z) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}z'z\right\} \qquad [5.3]$$

Dato che per definizione tutte le covarianze sono nulle all'interno della matrice I_n, nella variabile casuale multinormale standardizzata tutte le variabili casuali che compongono il vettore Z sono incorrelate.

Esempio 5.1 *La variabile casuale X è distribuita come una multinormale trivariata, con*

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare:

1. $E(X_2)$;
2. $Var(X_3)$;
3. $E(X_1 + X_3)$;
4. $Var(X_1 + X_3)$;
5. $E(X_1|X_2)$;
6. $Var(X_1|X_3)$;
7. *la distribuzione di* $\iota'X$ *dove* $\iota' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

La soluzione ai diversi quesiti proposti risiede nelle proprietà della variabile casuale multinormale, infatti:

1. *Il valore atteso di X_2 va ricercato in corrispondenza del secondo elemento del vettore delle medie μ, infatti risulta:*
$$E(X_2) = 2$$
2. *La varianza di X_3 è il terzo elemento della diagonale principale delle matrice Σ, quindi:*
$$Var(X_3) = 1$$

3. *Per le proprietà del valore atteso si ha:*

$$E(X_1 + X_3) = E(X_1) + E(X_3)$$
$$E(X_1 + X_3) = 0 - 1 = -1$$

4. *Per le proprietà della varianza, risulta:*

$$Var(X_1 + X_3) = Var(X_1) + Var(X_3) + 2Cov(X_1, X_3)$$
$$Var(X_1 + X_3) = 1 + 1 + 2 \cdot 0 = 2$$

5. *Per poter calcolare la media condizionata di X_1 dato X_2 occorre conoscere la distribuzione di $X_1|X_2$. Dato che, per la regola delle probabilità condizionate, risulta che la funzione di densità condizionale è pari a:*

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$$

$f(x_1, x_2)$ è la funzione di densità congiunta di X_1 e X_2. Essa ha l'equazione di una variabile casuale normale bivariata, cioè:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2}\exp\{(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\} \\ f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

dove ρ è il coefficiente di correlazione.
La funzione di densità marginale $f(x_2)$ ha invece l'equazione di una normale univariata, cioè:

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

Eseguendo il rapporto, dopo alcune semplificazioni si ottiene:

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2\right\}$$

Ponendo $M = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2)$ e $S = \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}$ si ha:

$$f(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-M}{S}\right)^2\right\}$$

che a sua volta è una funzione di densità di una variabile casuale normale di media M e varianza S^2. Si può agevolmente notare che tale risultato è quello enunciato dalla proprietà 3. (b) della variabile casuale multinormale di cui sopra.
A questo punto si può concludere che:

$$E(X_1|X_2) = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2)$$
$$E(X_1|X_2) = 0 + \frac{0.5}{1}(x_2 - 2)$$
$$E(X_1|X_2) = \frac{1}{2}x_2 - 1$$

6. *Per risolvere questo punto dell'esercizio si rimanda al punto precedente (basta solamente sostituire la variabile X_3 alla variabile X_2).*
   A questo punto è agevole concludere che:

$$Var(X_1|X_3) = \sigma_1^2(1-\rho^2)$$

   dove ρ in questo caso è il coefficiente di correlazione tra X_1 e X_3.
   Sostituendo a tale coefficiente la sua espressione analitica si ottiene:

$$\begin{aligned} Var(X_1|X_3) &= \sigma_1^2 \left(1 - \frac{Cov(X_1,X_3)^2}{Var(X_3)^2}\right) \\ Var(X_1|X_3) &= \sigma_1^2 \left(1 - \frac{\sigma_{13}^2}{\sigma_3^2}\right) \\ Var(X_1|X_3) &= 1 \end{aligned}$$

7. *Dalla proprietà 2. della variabile casuale multinormale si evince che una combinazione lineare di variabili casuali normali è anch'essa una variabile casuale normale.*
   In questo caso perciò risulta:

$$\iota' X \sim N(\iota'\mu, \iota'\Sigma\iota)$$

   Il valore atteso è pari:

$$\iota'\mu = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1$$

   La varianza è:

$$\iota'\Sigma\iota = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

   La distribuzione di $\iota' X$ è quindi:

$$\iota' X \sim N(1,5)$$

---

6 Funzione generatrice dei momenti

La funzione generatrice dei momenti[1] è un ottimo strumento per il calcolo dei momenti di una qualsiasi variabile casuale soprattutto quando tale calcolo risulta piuttosto complesso. La f.g.m. è una trasformazione integrale che associa una particolare funzione (se questa esiste) alle funzioni di probabilità e/o di densità. Analiticamente la f.g.m. ha la seguente espressione:

$$G(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in S} e^{tx} p(x) & \text{Caso discreto} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{Caso continuo} \end{cases} \qquad [6.1]$$

dove S rappresenta il supporto delle variabili casuali nel caso discreto. Affinché esista la f.g.m., la serie o l'integrale contenuti nella [6.1] devono esistere in corrispondenza di valori della variabile t appartenenti ad un intorno qualsiasi dell'origine, cioè per $t \in [-t_0; t_0]$ con $t_0 > 0$.

PROPRIETÀ DELLA F.G.M.:

1. La f.g.m. nell'origine esiste sempre ed ha valore unitario, infatti, se $t = 0$, per la proprietà fondamentale della funzione di probabilità e/o di densità, risulta:
$$G(0) = 1$$
2. La derivata s-esima in t_0 della f.g.m. coincide con il momento di ordine s della variabile casuale considerata, cioè:
$$\frac{\partial^s G(t_0)}{\partial t^s} = E(X^s)$$
3. La f.g.m. determina in modo univoco la funzione di ripartizione quando questa esiste.

[1] D'ora in avanti sarà chiamata semplicemente f.g.m.

4. Se la f.g.m. esiste, essa è unica.

Esempio 6.1 *Calcolare il valore atteso della variabile casuale uniforme $U(a,b)$ attraverso la f.g.m.*

$$G(t) = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx$$
$$G(t) = \frac{1}{b-a}\left|\frac{e^{tx}}{t}\right|_a^b$$
$$G(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$$

Per trovare il momento primo della distribuzione occorre calcolare la derivata prima della f.g.m. ottenuta in corrispondenza di $t=0$, quindi:

$$\frac{\partial G(0)}{\partial t} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{bte^{bt}-ate^{at}-e^{bt}+e^{at}}{t^2}\right]$$
$$\frac{\partial G(0)}{\partial t} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{bt}(bt-1)-e^{at}(at-1)}{t^2}\right]$$

La derivata in $t=0$ assume una forma indeterminata, quindi occorre calcolare il limite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\left[\frac{bt-1}{t^2}e^{bt}-\frac{at-1}{t^2}e^{at}\right]$$

Per risolvere tale limite bisogna fare ricorso allo sviluppo in serie di McLaurin. L'equazione diviene perciò la seguente:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\quad & \frac{1}{b-a}\left[\frac{bt-1}{t^2}\left(1+bt+\frac{b^2t^2}{2}+\frac{b^3t^3}{3!}+\cdots\right)-\right.\\ & \left.-\frac{at-1}{t^2}\left(1+at+\frac{a^2t^2}{2}+\frac{a^3t^3}{3!}+\cdots\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\quad & \frac{1}{b-a}\left[\frac{b}{t}+b^2+\frac{b^3t}{2}+\frac{b^4t^2}{3!}+\cdots-\frac{1}{t^2}-\frac{b}{t}-\frac{b^2}{2}-\frac{b^3t}{3!}-\cdots-\right.\\ & \left.-\frac{a}{t}-a^2-\frac{a^3t}{2}-\frac{a^4t^2}{3!}-\cdots+\frac{1}{t^2}+\frac{a}{t}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3t}{3!}-\cdots\right]\end{aligned}$$

Per $t\to 0$ tutti i termini in cui la variabile t compare al numeratore si annullano. Effettuando le opportune semplificazioni si ha:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{a+b}{2}$$

Il valore così ottenuto coincide con il valore atteso della variabile casuale uniforme.

Esempio 6.2 *Calcolare la varianza della distribuzione binomiale attraverso la f.g.m.*

$$G(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$G(t) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(e^tp)^x(1-p)^{n-x}$$

Tale formula è riconducibile allo sviluppo del polinomio di Newton enunciato alla nota 4, quindi la f.g.m. della variabile casuale binomiale è:

$$G(t) = [1 - p + pe^t]^n$$

La derivata prima in corrispondenza di $t = 0$ *genera il valore atteso, infatti:*

$$\begin{aligned} E(B) &= \frac{\partial G(0)}{\partial t} \\ E(B) &= n(1 - p + pe^t)^{n-1} e^t \\ E(B) &= np \end{aligned}$$

La derivata seconda in $t = 0$ *restituisce il momento secondo:*

$$\begin{aligned} E(B^2) &= \frac{\partial^2 G(0)}{\partial t^2} \\ E(B^2) &= n(n-1)(1 - p + pe^t)^{n-2}(pe^t)^2 + n(1 - p + pe^t)^{n-1} e^t \\ E(B^2) &= n(n-1)p^2 + np \\ E(B^2) &= n^2 p^2 + np(1-p) \end{aligned}$$

La varianza risulta essere perciò:

$$\begin{aligned} Var(B) &= E(B^2) - [E(B)]^2 \\ Var(B) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Esempio 6.3 *Calcolare la varianza della variabile casuale di Poisson attraverso la f.g.m.*

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ G(t) &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \end{aligned}$$

Dallo sviluppo in serie di McLaurin si ottiene:

$$G(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

dove $t \in (-\infty, +\infty)$. *I momenti primo e secondo si ricavano rispettivamente dalle condizioni del primo e del secondo ordine in corrispondenza di* $t = 0$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\partial G(0)}{\partial t} \\ E(X) &= \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)} \\ E(X) &= \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{\partial^2 G(0)}{\partial t^2} \\ E(X^2) &= [\lambda e^t + (\lambda e^t)^2] e^{\lambda(e^t - 1)} \\ E(X^2) &= \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

La varianza perciò risulta essere:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ Var(X) &= \lambda \end{aligned}$$

Esempio 6.4 *Calcolare la varianza della variabile casuale normale attraverso la f.g.m.*

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Sostituendo la variabile casuale normale standardizzata $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma^2}$*:*

$$\begin{aligned}
G(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\sigma z+\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
G(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2+\sigma t z} dz \\
G(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(z-\sigma t)^2-\sigma^2 t^2]} dz \\
G(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2} dz
\end{aligned}$$

Per le proprietà della variabile casuale normale risulta:

$$G(t) = e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

dove $t \in (-\infty, +\infty)$.
Calcolando le condizioni del primo e del secondo ordine per $t = 0$ *si ottiene:*

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\partial G(0)}{\partial t} \\
E(X) &= (\mu + \sigma^2 t)e^{t\mu} \\
E(X) &= \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{\partial^2 G(0)}{\partial t^2} \\
E(X^2) &= \sigma^2 e^{t\mu} + \mu(\mu + \sigma^2 t)e^{t\mu} \\
E(X^2) &= (\sigma^2 + \mu^2 + \sigma^2\mu t)e^{t\mu} \\
E(X^2) &= \sigma^2 + \mu^2
\end{aligned}$$

La varianza della variabile casuale normale è perciò pari a σ^2*.*

Appendice: alcuni risultati utili

Funzione Gamma

Funzione Poligamma

La funzione **digamma**[2].

Quando $t = 0$ risulta:

$$G'(t = 0) = a\Gamma(1)\Gamma(1) + 2\psi_1(1)\Gamma(1)$$

Poiché $\Gamma(1) = 1$ e $\psi_1(1) = \ln 1 = 0$ il valore atteso della variabile casuale logistica risulta perciò essere[3]:

$$E(X) = G'(t = 0) = a$$

Funzione Beta

Metodo delle trasformazioni

[2]La funzione digamma è ottenuta derivando la funzione gamma rispetto al proprio argomento. Essa rappresenta un caso particolare della funzione **polygamma di ordine** k data dalla k-esima derivata della funzione gamma rispetto al proprio argomento, cioé:

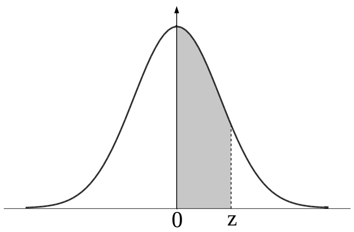
$$\psi_k(x) = \frac{\partial^k \Gamma(x)}{\partial x^k}$$

Quando $k = 1$ si ottiene la digamma $\psi_1(x)$, mentre per $k = 2$ si a la **trigamma** $\psi_2(x)$.

[3]Per i valori della funzione digamma si veda in proposito *www.mathworld.com*

Tavole statistiche

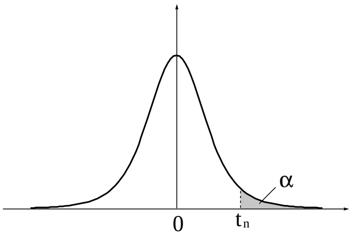
Probabilità variabile casuale normale standardizzata



Per ciascun quantile la tabella restituisce il livello di probabilità $Pr(0 < Z < z)$, equivalente all'area sottesa dalla funzione di densità in corrispondenza dell'intervallo $[0, z]$. Si tenga presente che tale funzione è simmetrica.

Z	**.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0477	0.0517	0.0557	0.0596	0.0635	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0831	0.0871	0.0909	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1102	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1627	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2122	0.2156	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2356	0.2389	0.2421	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2703	0.2734	0.2764	0.2793	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3364	0.3389
1.0	0.3413	0.3437	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3707	0.3728	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3868	0.3888	0.3906	0.3925	0.3943	0.3961	0.3979	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4146	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4250	0.4265	0.4278	0.4292	0.4305	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4624	0.4633
1.8	0.4640	0.4648	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4685	0.4692	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4874	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4895	0.4898	0.4901	0.4903	0.4906	0.4908	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4924	0.4926	0.4928	0.4930	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4939	0.4941	0.4943	0.4944	0.4946	0.4947	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4958	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4985	0.4986
3.0	0.4986	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

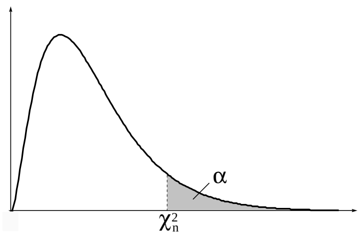
Quantili della variabile casuale t di Student



La tabella restituisce i quantili della distribuzione t di Student in corrispondenza di un dato valore n dei g.d.l. e di un dato valore α di probabilità equivalente all'area colorata della figura. Si tenga presente che la funzione di densità di questa variabile casuale è simmetrica e che per $n \to \infty$ essa converge ad una variabile casuale normale.

n \ α	**0.4**	**0.25**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**
1	0.3249	1.0000	3.0777	6.3137	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.2886	0.8165	1.8856	2.9200	4.3026	6.9645	9.9248
3	0.2766	0.7649	1.6377	2.3533	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.2707	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.2672	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.2648	0.7175	1.4397	1.9432	2.4469	3.1426	3.7074
7	0.2631	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.2619	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8964	3.3554
9	0.2609	0.7027	1.3830	1.8331	2.2621	2.8214	3.2498
10	0.2602	0.6998	1.3722	1.8124	2.2281	2.7637	3.1692
11	0.2595	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.2590	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.2586	0.6938	1.3502	1.7709	2.1603	2.6503	3.0123
14	0.2582	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.2579	0.6912	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.2576	0.6901	1.3367	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.2573	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.2571	0.6883	1.3304	1.7340	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.2569	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.2567	0.6869	1.3253	1.7247	2.0859	2.5280	2.8453
21	0.2566	0.6863	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8313
22	0.2564	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8187
23	0.2563	0.6853	1.3194	1.7139	2.0686	2.4999	2.8073
24	0.2562	0.6848	1.3178	1.7108	2.0639	2.4921	2.7969
25	0.2560	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.2559	0.6840	1.3149	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.2558	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4726	2.7707
28	0.2557	0.6833	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7632
29	0.2557	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.2556	0.6827	1.3104	1.6972	2.0423	2.4572	2.7500
40	0.2550	0.6807	1.3031	1.6838	2.0211	2.4232	2.7044
50	0.2547	0.6794	1.2989	1.6759	2.0085	2.4033	2.6778
60	0.2545	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6602
80	0.2542	0.6775	1.2922	1.6641	1.9900	2.3739	2.6387
100	0.2540	0.6769	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
120	0.2539	0.6765	1.2886	1.6576	1.9799	2.3578	2.6174
∞	0.2533	0.6745	1.2815	1.6448	1.9600	2.3263	2.5758

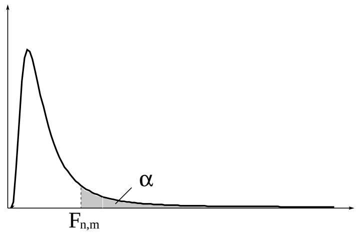
Quantili della variabile casuale chi quadrato



La tabella restituisce i quantili della distribuzione chi quadrato in corrispondenza di un dato valore n dei g.d.l. e di un dato valore α di probabilità equivalente all'area colorata della figura. Si tenga presente che questa variabile casuale converge ad una variabile casuale normale quando $n \to \infty$.

n \ α	**0.99**	**0.975**	**0.95**	**0.9**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**
1	$1.57 \cdot 10^{-2}$	$9.82 \cdot 10^{-2}$	0.0039	0.0158	2.7055	3.8414	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9914	7.3777	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1681	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2469	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5705	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0087	5.8918	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5467	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4077	7.5642	8.6717	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
40	22.1643	24.4334	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539
60	37.4849	40.4817	43.1886	46.4589	74.3976	79.0819	83.2977	88.3794
70	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5277	90.5312	95.0232	100.4257
80	53.5402	57.1533	60.3916	64.2779	96.5783	101.8798	106.6298	112.3298
90	61.7542	65.6467	69.1269	73.2911	107.5659	113.1459	118.1369	124.1169
100	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4981	124.3421	129.5611	135.8071

Quantili della variabile casuale F di Snedecor



Tutte le tabelle che seguono restituiscono i quantili della distribuzione F di Snedecor per un prefissato valore di probabilità α in corrispondenza dell'incrocio dei valori n e m relativi ai suoi g.d.l.

$\alpha = 0.1$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
11	3.22	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60

$\alpha = 0.1$

m \ n	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	1.60	1.54	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

$\alpha = 0.05$

m \ n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83

$\alpha = 0.05$

m \ n	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	243.91	245.95	248.01	249.05	250.09	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.62
5	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

$\alpha = 0.025$

m \ n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	6.16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05

$\alpha = 0.025$

m \ n	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	976.71	984.87	993.10	997.25	1001.41	1005.60	1009.80	1014.02	1018.26
2	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

$\alpha = 0.001$

n / m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	7.72	5.53	4.66	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32

$\alpha = 0.001$

n / m	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6106.32	6157.28	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Indice analitico